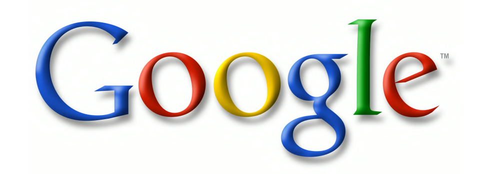


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

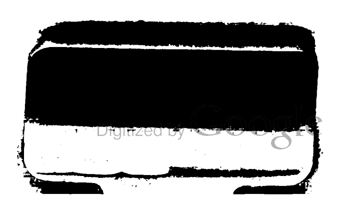
+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


B 471249




Digitized by Google

QA
331
.P48

Digitized by Google

Digitized by Google

VORLESUNGEN

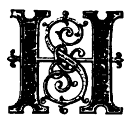
53 498

ÜBER

FUNKTIONSTHEORIE

VON

JULIUS PETERSEN



KOPENHAGEN

VERLAG VON ANDR. FRED. HØST & SØN

1898

Digitized by Google

Digitized by Google

VORWORT.

Vergleicht man das Inhaltsverzeichnis mit dem Umfange des vorliegenden Buches, so erkennt man leicht, dass hier keine erschöpfende Behandlung der Funktionstheorie auf ihrem gegenwärtigen Standpunkt gegeben wird; in der That ist es auch nur meine Absicht gewesen, meinen Zuhörern einen Überblick über das Wesentlichste zu verschaffen und ihnen die notwendigste Grundlage für selbständiges Arbeiten zu geben. Deshalb ist das Hauptgewicht auf die allgemeine Theorie gelegt, während die zweite Abteilung des Buches im wesentlichen als eine Auswahl von Beispielen für die Anwendung der Theorie aufzufassen ist.

Wo ich die Werke anderer Schriftsteller benutzt habe, sind diese angeführt; sollten in dieser Beziehung Unterlassungen vorgekommen sein, so bitte ich das entschuldigen zu wollen. Gewöhnlich habe ich mehr das Ziel solcher Schriftsteller benutzt als ihre Entwickelungen selbst, da ich, um Plan und Einheit des Buches nicht zu stören, meistens neue Wege zum Ziele habe suchen müssen.

Von Einzelheiten, die vermutlich neu sind, will ich einen Beweis für den Satz anführen, der nicht von *Riemann* bewiesen ist und den *Neumann* als Axiom aufgestellt hat, dass sich nämlich auf einer zusammenhängenden Fläche immer ein Querschnitt anbringen lässt, der die Fläche nicht in zwei Stücke teilt, solange diese nicht eine Elementarfläche ist, und sodann eine

Digitized by Google

daran sich anschliessende Bestimmung einer Normalform für die Flächen. Ferner eine Summationsformel für endliche Reihen, die für einen speciellen Fall von *Abel* gegeben worden ist, wo es aber an einer genauen Bestimmung der Grenzen für die Gültigkeit der Formel fehlte. Man hat hier wieder ein Beispiel für den häufig eintretenden Fall, dass die Behandlung einer Frage erleichtert wird, wenn man die Variablen als komplex auffasst; wenn *Stirlings* Formel so oft ohne eigentlich befriedigendes Resultat behandelt worden ist, so geschah das, weil man glaubte die Untersuchung auf Reihen mit reellen Gliedern beschränken zu müssen. Mit Hülfe der Summationsformel finde ich einen interessanten allgemein gültigen Ausdruck für die logarithmisch Abgeleitete von $\Gamma(z)$. Für die Anzahl der Pole und Nullpunkte innerhalb einer geschlossenen Kurve wird man einen Ausdruck finden, der interessant ist durch seine Analogie mit *Gauss*' Formel für die Elektricitätsmenge innerhalb einer geschlossenen Fläche. Meine Anwendung der ζ-Funktion zur Bestimmung der Menge von Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze ist im Grunde dieselbe wie diejenige *Riemanns*; dennoch glaube ich, dass sie durch die von ihr gewährte grössere Übersichtlichkeit nicht ohne Interesse ist.

Ich kann diese Bemerkungen nicht schliessen ohne Prof. Dr. *v. Fischer-Benzon* meinen herzlichen Dank auszusprechen für die Sorgfalt und Umsicht, durch die er dieses wie so manches andere von meinen Büchern auch solchen zugänglich gemacht hat, die der dänischen Sprache nicht mächtig sind.

Kopenhagen, im August 1898.

Julius Petersen.

Digitized by Google

INHALT.

Erster Abschnitt. Allgemeine Funktionstheorie.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt. Specielle Funktionen.

Digitized by Google

ERSTER ABSCHNITT.

ALLGEMEINE FUNKTIONSTHEORIE.

Digitized by Google

Digitized by Google

EINLEITUNG.

1. Algebra ist eine Lehre von Zeichensprachen; da es jedoch Zeichensprachen giebt, die sich passender Weise nicht unter den Begriff Algebra einreihen lassen, so wollen wir die Definition folgendermassen begrenzen:

1) Die Sprache muss Bezeichnungen enthalten, die sich anwenden lassen, um die Individuen in einer oder mehreren, endlichen oder unendlichen Gruppen zu charakterisieren. Die Bezeichnungen in der Algebra haben nur die Bedeutung, dass sie etwas Verschiedenes charakterisieren; erst durch die Anwendungen wird das Verschiedene näher bestimmt, z. B. als die verschiedenen Versetzungen einer gegebenen Anzahl von Elementen (endliche Gruppe), die Punkte oder Tangenten einer Kurve (einfach unendliche Gruppe), die Punkte einer Ebene (zweifach unendliche Gruppe), die Punkte des Raumes oder dessen Drehungen um einen festen Punkt (dreifach unendliche Gruppen) u. s. w.

2) Die Sprache muss Bezeichnungen für gewisse Operationen enthalten, durch welche die Individuen der Gruppe in Verbindung mit einander gesetzt werden.

3) Die Sprache muss das Identitätszeichen „=“ enthalten, das angiebt, dass die dadurch verbundenen Individuen identisch sind, oder jedenfalls bei der vorliegenden Untersuchung als identisch aufgefasst werden sollen.

2. Es müssen gewisse Fundamentalgleichungen gegeben sein, welche die Gruppe, die man behandelt, charakterisieren;

Digitized by Google

will man die Algebra auf eine Gruppe von Individuen anwenden, so muss man untersuchen, ob diese den Fundamentalgleichungen genügt, auf denen die Algebra ruht. Während die Fundamentalgleichungen, wissenschaftlich gesprochen, willkürlich sind, wird man in der Praxis natürlich nur solche wählen, die für Gruppen, welche von Interesse sind, passen. So gilt die Fundamentalgleichung $ab = ba$ wohl bei den gewöhnlichen Anwendungen, aber nicht, wenn die Gruppe beispielsweise aus Drehungen des Raumes um Axen, die durch einen festen Punkt gehen, besteht, und Multiplikation die Zusammensetzung solcher Drehungen bedeutet.

3. Da die Entwickelung der Algebra sich allein auf den Fundamentalgleichungen aufbaut und auf rein logischem Wege weitergeführt wird, so werden solche Gruppen, deren Individuen einander eindeutig entsprechen, gleichwertig; denn wenn man mit den Individuen der einen Gruppe operiert, kann man sich überall diese durch die entsprechenden Individuen der anderen Gruppe ersetzt denken. So wird die gewöhnliche Algebra, die eine einfach unendliche Gruppe von Individuen behandelt, die sich durch die Punkte einer Geraden darstellen lassen, ebenso gut auf jede Kurve vom Geschlecht Null angewandt werden könnnen; denn die Punkte einer solchen kann man dahinbringen den Punkten einer Geraden eindeutig zu entsprechen. Die Bedeutung der Operationszeichen muss dann von der einen Gruppe auf die andere mit Hülfe derjenigen Gesetze übertragen werden, welche bestimmen, wie die Punkte einander paarweise entsprechen.

Die komplexen Zahlen lassen sich, wie bekannt, auf unendlich viele Arten[1]) mit den Punkten einer Ebene paaren (dahinbringen, den Punkten einer Ebene gegenseitig eindeutig zu entsprechen). Im Folgenden wollen wir die gewöhnliche Darstellung benutzen, nach der die Axe der imaginären Zahlen senkrecht steht auf der Axe der reellen Zahlen und $i^2 = -1$ ist. Die geometrische Bedeutung der Operationszeichen und

[1]) Siehe die Abhandlung des Verfassers in „Tidsskrift for Mathematik, udgivet af J. P. Gram og H. G. Zeuthen", 1885, Pg. 1.

Digitized by Google

die weitere Entwickelung bei dieser Übertragung wird als bekannt vorausgesetzt. Wir wollen keinen Unterschied machen zwischen einer komplexen Zahl und dem ihr entsprechenden Punkt, so dass ein Buchstabe, der das eine bezeichnet, ebenso gut das andere bezeichnen kann. Der Modulus einer komplexen Zahl a wird von *Weierstrass* durch $|a|$ bezeichnet und heisst der absolute Betrag der Zahl.

Der ungeheure Fortschritt, den die Einführung des zweifach unendlichen Zahlensystems für die Mathematik mit sich brachte, führte naturgemäss zur Untersuchung von mehrfach unendlichen Zahlensystemen; aus diesen Untersuchungen, die in einem besonderen Falle von *Hamilton* begonnen waren, später allgemeiner von *Weierstrass* aufgenommen wurden und von mehreren anderen Schriftstellern[1]) fortgesetzt worden sind, scheint hervorzugehen, dass die mehrdimensionalen Zahlen nur eine ziemlich untergeordnete Rolle werden spielen können. Die einzigen Systeme, die bis dahin einige Bedeutung erlangt haben, sind *Hamiltons* Quaternionen und die von *Gauss* in die Zahlentheorie eingeführten idealen Zahlen.

[1]) Siehe die Abhandlung des Verfassers in Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1887. Nr. 17.

Digitized by Google

KAPITEL I.

KONFORME ABBILDUNG. MONOGENE FUNKTIONEN.

VORZEICHEN.

1. Die Ebene hat zwei Seiten, die wir, indem wir uns die Ebene horizontal denken, die obere und die untere Seite nennen wollen. Eine Gerade der Ebene beschreibt einen wachsenden Winkel, wenn man, auf der Ebene stehend, die Gerade sich entgegensetzt wie der Uhrzeiger drehen sieht. Ein rechtwinkeliges Koordinatensystem wird so gelegt, dass $(x\,y) = \frac{\pi}{2}$, während die z-Axe positiv nach oben ist.

Ein Flächenstück ist *zusammenhängend*, wenn man durch eine stetige Bewegung von jedem seiner Punkte zu jedem anderen von seinen Punkten gelangen kann ohne seine Begrenzung zu passieren.

Ein endlicher, zusammenhängender Teil der Ebene wird von einer oder mehreren geschlossenen Kurven, den *Randkurven*, begrenzt; von diesen setzen wir voraus, dass keine von ihnen sich selbst oder eine von den anderen schneidet; sind mehrere Randkurven vorhanden, so muss eine von ihnen die übrigen umschliessen, während diese ganz ausserhalb einander liegen. Wir durchlaufen die Randkurven in *positiver* Richtung, wenn wir, auf der Ebene gehend, beständig die Fläche zur *Linken* haben. Wird der Punkt als ein unendlich kleines Flächenstück aufgefasst, so ist hierdurch die posi-

Digitized by Google

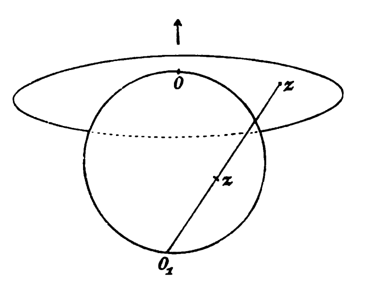
tive Umlaufsrichtung um den Punkt bestimmt. Eine Tangente an eine Randkurve erhält dieselbe positive Richtung T wie das Bogenelement, während die positive Richtung N der Normale sich in das Flächenstück hinein erstreckt; man hat also

$$(TN) = +\frac{\pi}{2}.$$

Das hier Gesagte gilt im allgemeinen auch für krumme Flächen mit zwei Seiten, die der oberen und unteren Seite der Ebene entsprechen.

DIE STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION.

2. Wir legen eine Kugel mit dem Radius 1 so, dass sie unsere Ebene in ihrem Nullpunkte O berührt und unterhalb der Ebene fällt. Durch den diametral entgegengesetzten Punkt O_1 der Kugel ziehen wir Geraden und die Schnittpunkte dieser mit der Kugel und der Ebene bestimmen eine ein-eindeutige Verbindung zwischen diesen Punkten (Stereographische Projektion).



Scheinbar entsprechen einem Punkte der Ebene zwei Punkte der Kugel, aber der eine von diesen ist immer der feste Punkt O_1, von dem man absehen kann. Von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachtet bedeutet eine ein-eindeutige Verbindung zwischen den Punkten, dass jeder Punkt, wenn der ihm entsprechende gegeben ist, durch eine Gleichung ersten Grades bestimmt wird. Diese Gleichung wird hier, wenn der Punkt der Kugel gesucht wird, vom zweiten Grade sein, aber eine dem festen Punkte O_1 entsprechende konstante Wurzel haben, deren entsprechender linearer Faktor sich durch Division entfernen lässt. Der Punkt O_1 entspricht deshalb nur solchen Punkten der Ebene, für welche der bewegliche Punkt nach O_1 hinunterrückt. Dies gilt von allen unendlich fernen Punkten der Ebene;

Digitized by Google

der Punkt O_1 stellt also eine Ausnahme dar, indem er allen unendlich fernen Punkten der Ebene entspricht. Um sich von diesem Ausnahmefalle zu befreien, fingiert man oft, dass alle unendlich fernen Punkte der Ebene in einen einzigen Punkt ∞ zusammenfallen. Indem die Punkte der Kugel ein-eindeutig denjenigen der Ebene, und diese wieder ein-eindeutig den komplexen Zahlen entsprechen, erhalten wir eine ein-eindeutige Verbindung zwischen diesen und den Punkten der Kugel bestimmt; wir bezeichnen deshalb jeden Punkt der Kugel durch dieselbe komplexe Zahl wie den entsprechenden Punkt der Ebene.

Wenn zwei Flächen oder Flächenstücke auf eine oder die andere Weise dahin gebracht sind sich Punkt für Punkt zu entsprechen, so sagen wir, dass die eine Fläche auf der anderen abgebildet worden ist. Einer Kurve auf der einen Fläche entspricht dann eine Kurve auf der anderen Fläche, und einem Schnittpunkt von zwei Kurven auf der einen Fläche entspricht ein Schnittpunkt der beiden entsprechenden Kurven auf der anderen Fläche. Wenn nun zwei beliebige Kurven, die durch einen willkürlich gewählten Punkt gezogen werden, denselben Winkel mit einander bilden (Winkel der Tangenten, mit Vorzeichen gerechnet) wie ihre Bilder an dem entsprechenden Punkte, so nennt man die Abbildung *konform*; diese Benennung wird jedoch auch dann noch benutzt, wenn es gewisse Ausnahmepunkte giebt, an denen die Winkel nicht gleich gross werden, und das Folgende wird uns zeigen, dass eben diese Ausnahmepunkte eine Hauptrolle spielen. Figuren, die konforme Abbildungen von einander darstellen, sind wegen der Gleichheit ihrer Winkel ähnlich in ihren unendlich kleinen Teilen.

Wir wollen nun die stereographische Abbildung näher untersuchen und zuerst zeigen, dass *einem Kreise in der Ebene ein Kreis auf der Kugel entspricht.*

Eine Kugel geht durch Inversion in eine Kugel über, und ein Kreis, der sich als Schnittkurve von zwei Kugeln auffassen lässt, muss deshalb in einen Kreis übergehen. Invertiert man mit Bezug auf O_1, so dass O liegen bleibt, so wird die Ebene

Digitized by Google

in die Kugel übergehen und die Kugel in die Ebene, während die projicierenden Geraden liegen bleiben. Die Abbildung des Kreises auf der Kugel ist deshalb dessen inverse Figur, also ein Kreis. Da eine Gerade ein Kreis mit unendlich fernen Punkten ist, so wird ihr Bild ein Kreis durch O_1.

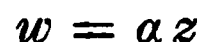
Die stereographische Abbildung ist konform; es seien nämlich AB und AC zwei beliebige Geraden in der Ebene, und A werde auf die Kugel in A_1 projiciert. AB und AC werden dann auf die Kugel in zwei Kreisen projiciert, die sich in A_1 und O_1 schneiden, und an den beiden Schnittpunkten, der Symmetrie wegen, gleich grosse Winkel bilden. Da nun der Winkel bei O_1 gleich dem Winkel BAC ist, so wird der Winkel bei A_1 es auch. Wie oben gezeigt, lässt sich die stereographische Abbildung als eine Inversion im Raume mit dem Inversionscentrum O_1 betrachten. Jede Fläche wird durch Inversion konform abgebildet; wir sehen nämlich, dass die Winkel nicht verändert werden, wenn wir die Umgegend von einem Punkte der Fläche als mit der Berührungsebene zusammenfallend betrachten.

Die stereographische Projektion, die beim Kartenzeichnen angewandt wird, war bereits im Altertum bekannt (*Hipparch, Ptolemäus*), ebensowohl wie ihre Eigenschaft, Kreise als Kreise abzubilden. Dagegen bemerkte *Hook* wohl zuerst, dass diese Abbildung konform ist.

3. Wir kennen bereits von der elementaren Planimetrie her verschiedene einfache konforme Abbildungen der Ebene in dieser selbst, da kongruente, ähnliche und inverse Figuren konforme Abbildungen von einander sind, die letztgenannten jedoch so, dass die gleich grossen Winkel entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Wir können diese Abbildungen durch einfache Gleichungen bestimmen; so drückt die Gleichung

$$w = z + a,$$

worin a eine komplexe Konstante ist, aus, dass die Punkte z und w kongruente Figuren beschreiben, die aus einander durch eine in Grösse und Richtung durch a bestimmte Parallelverschiebung gebildet werden. Die Gleichung



$$w = az$$

Digitized by Google

drückt aus, dass die von w beschriebene Figur aus der von z beschriebenen gebildet ist durch eine Drehung um den Nullpunkt, für welche der Drehungswinkel das Argument darstellt, während das Drehungsverhältnis der absolute Betrag von a ist. Die Gleichung

$$w = \frac{1}{z}$$

drückt aus, dass die von w beschriebene Figur aus der von z beschriebenen gebildet ist durch eine Inversion und eine Umlegung um die Axe der reellen Zahlen.

Unter einer *linearen Transformation* einer Figur verstehen wir eine Transformation, die bestimmt wird durch die Gleichung

$$w = \frac{a + bz}{c + dz},$$

worin a, b, c und d beliebige, komplexe Konstanten sind, jedoch so, dass der Bruch nicht auf eine Konstante reduciert wird, das heisst, dass seine Determinante, $ad - bc$, nicht gleich Null ist. Dadurch, dass man auf passende Weise die früher angegebenen Transformationen nach einander anwendet, kann man die allgemeine lineare Transformation bilden, und diese muss deshalb eine konforme Abbildung bestimmen. Man sagt von den beiden von w und z gleichzeitig beschriebenen Figuren, dass sie sich in *Kreisverwandtschaft* befinden, weil ein Kreis (darunter eine Gerade mit einbegriffen) in der einen Figur als ein Kreis in der anderen abgebildet wird.

Da die stereographische Abbildung konform ist, so müssen lineare Transformationen auf der Kugel auch konforme Abbildungen geben.

MONOGENE FUNKTIONEN.

4. Wir sagen, dass w eine Funktion von z ist, wenn auf die eine oder andere Weise eine solche Verbindung zwischen den beiden Grössen stattfindet, dass bestimmte Werte von w bestimmten Werten von z entsprechen. Diese Definition haben wir jedoch noch etwas genauer zu präcisieren.

Unter dem *Bereich* eines Punktes verstehen wir ein Flächenstück, in welchem der Punkt belegen ist; dieses kann

Digitized by Google

so klein sein, wie man will, wenn nur die begrenzende Kurve überall endlichen Abstand vom Punkte hat. Eine Funktion heisst *stetig* in einem Punkte z_0 mit dem Functionswerte w_0, wenn man mit z_0 als Mittelpunkt einen solchen Kreis zeichnen kann, dass für alle Punkte innerhalb des Kreises $|w - w_0| < \varrho$, wo ϱ eine gegebene beliebig kleine positive Grösse bedeutet. Ist die Funktion mehrdeutig, so meinen wir hiermit, dass, wenn wir im Punkte z einen beliebigen Wert w_1 von den Funktionswerten wählen, zwischen den jedem Nachbarpunkte entsprechenden Funktionswerten einer sein muss, dessen Unterschied von w_1 einen unendlich kleinen absoluten Betrag hat; eben diesen Unterschied bezeichnen wir als Zunahme. Jeder einzelne von den Funktionswerten erhält auf die Weise in der Umgegend des Punktes seine bestimmte stetige Fortsetzung und bestimmt dadurch innerhalb gewisser Grenzen eine eindeutige Funktion.

Die erste Forderung, die wir an unsere Funktionen stellen, ist nun die, dass sie im Allgemeinen *stetig in der ganzen Ebene* sein sollen, oder jedenfalls für einen gewissen Teil der Ebene.

Wenn wir für einen Punkt z das Grenzverhältnis $\frac{dw}{dz}$ bestimmen, so müssen wir erwarten, dass dieses abhängig wird sowohl von z als auch vom Argument von dz. Wir stellen indessen die Forderung, dass der Differentialquotient im Allgemeinen unabhängig sein soll vom Argument von dz, also *eine Funktion von z allein.* Wir bezeichnen diese als die Abgeleitete der Funktion. Es kann jedoch, ohne das die Bezeichnung als Funktion zu gelten aufhört, eine endliche oder unendliche Anzahl zerstreuter Punkte, ja sogar ganze Kurven geben, für deren Punkte die aufgestellten Forderungen nicht erfüllt sind; solche Punkte nennen wir *singuläre* Punkte; die nicht singulären Punkte sind *regulär.*

Eine Funktion wird häufig so definiert, dass die Definition nur für einen Teil der Ebene gilt. So wird eine Definition mittels einer unendlichen Reihe nur für den Teil der Ebene gelten, für den die Reihe konvergent ist. Viele Definitionen

Digitized by Google

mittels bestimmter Integrale gelten gleichfalls nur für einen Teil der Ebene. Man bemüht sich in solchen Fällen die Funktion zu *erweiteren* oder *fortzusetzen*, indem man versucht andere Definitionen zu finden, die für einen grösseren Teil der Ebene gelten; so ist die Funktion $\frac{1}{1-z}$ für die ganze Ebene definiert, während die entsprechende Reihenentwickelung nur für Punkte gilt, die innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt und mit dem Radius 1 liegen. Es giebt Funktionen, die sich nicht auf die ganze Ebene erweitern lassen; wenn man auf eine geschlossene Kurve stösst, die aus lauter singulären Punkten besteht, so wird eine Erweiterung über diese Kurve hinaus nicht möglich sein.

Wenn wir von einer Funktion reden, so meinen wir damit *die so viel wie möglich erweiterte Funktion,* selbst wenn wir eine engere Definition benutzen. Es ist hier von entscheidender Bedeutung, dass eine Funktion, wie später gezeigt werden wird, sich nur auf eine Art erweitern lässt, d. h., wenn die Erweiterung auch auf verschiedenen Wegen geschieht, so bleibt das Resultat dasselbe, wenn die Erweiterung übereinstimmend mit den oben aufgestellten Forderungen geschieht; so können wir beispielsweise schliessen, dass eine Funktion, die in einem kleinen Teil der Ebene konstant ist, in der ganzen Ebene konstant sein muss, denn diese Erweiterung stimmt zu unseren Bedingungen, und eine andere Erweiterung ist dann nicht möglich.

Wir haben also wohl zu beachten, dass die mathematischen Ausdrücke, durch welche die Funktionen in der Regel definiert werden, nicht für die ganze Ebene zu dem zu stimmen brauchen, was wir nun unter der Funktion verstehen; es ist ausreichend, wenn der Ausdruck für einen Teil der Ebene eine Bestimmung liefert, die zu unseren Bedingungen stimmt; dadurch ist dann die Erweiterung bestimmt und sie kann durch Methoden ausgeführt werden, die später entwickelt werden sollen, aber es ist nicht sicher, ob die Erweiterung für andere Teile der Ebene zu dem gegebenen Ausdruck passt. So werden wir später ein bestimmtes Integral kennen lernen,

Digitized by Google

das auf den beiden Seiten einer gewissen Geraden zwei verschiedene Funktionen bestimmt, die sich jede für sich auf die ganze Ebene erweitern lassen. Sobald man eine von ihnen über die genannte Gerade hinaus erweitert, so erhält man Werte, die nicht zum Integrale stimmen. Man braucht nicht einmal vorauszusetzen, dass es für irgend einen Teil der Funktion einen mathematischen Ausdruck giebt. Wenn wir nur auf die eine oder andere Weise für einen noch so kleinen Teil der Ebene solche, den einzelnen Punkten entsprechende, Werte bestimmen, die unseren Bedingungen genügen, so ist dadurch eine Funktion vollständig bestimmt.

Funktionen, wie wir sie hier bestimmt haben, werden von *Cauchy monogene* Funktionen genannt; da andere Funktionen gegenwärtig keine wesentliche Rolle in der Mathematik spielen, so wollen wir im Folgenden unter Funktionen einer Variablen stets monogene Funktionen verstehen.

Alle Funktionen, die gewöhnlich in der Differentialrechnung behandelt werden, sind monogen, denn die Methoden, durch welche ihre Abgeleiteten als Funktionen von z bestimmt werden, lassen sich ebenso gut für komplexe wie für reelle Zahlen anwenden.

5. Ist $z = x + iy$, so wird eine Grösse f, die in gegebener Weise von x und y abhängt, für jeden Punkt der Ebene bestimmt sein; erfahren x und y die Zunahmen dx und dy, so wird f die Zunahme

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

erhalten, und z die Zunahme $dx + i\,dy$; nun soll das Verhältnis zwischen diesen beiden Zunahmen, wenn f eine Funktion von z sein soll, unabhängig sein von dem Verhältnis zwischen dx und dy; die notwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist, dass die Koefficienten von dx und dy in den beiden Ausdrücken proportional sind, oder dass der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

Digitized by Google

identisch genügt wird. Diese Gleichung drückt also die Bedingung dafür aus, dass f eine Funktion von z ist.

Ist f auf die Form $u + iv$ gebracht, worin u und v reelle Funktionen von x und y sind (d. h. solche, die reelle Werte für alle reellen Werte von x und y haben), so wird die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

die in die folgenden beiden zerfällt:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y};$$

aus diesen leitet man durch partielle Differentiation ab:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

also auch

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Die Funktionen u und v können also nicht beliebig sein, da sie derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen müssen; ist die eine von ihnen bekannt, so lässt sich die andere bis auf eine Konstante durch die Gleichungen (2) bestimmen.

6. Erteilen wir z zwei unendlich kleine Zunahmen mit verschiedenen Argumenten, dz und dz_1, so erfährt w zwei entsprechende Zunahmen dw und dw_1. Wir haben dann

$$(5) \qquad dw = f'(z)\,dz; \quad dw_1 = f'(z)\,dz_1,$$

woraus, wenn $f'(z)$ in dem betrachteten Punkte eine endliche von Null verschiedene Grösse ist, folgt, dass

$$(6) \qquad \frac{dw_1}{dw} = \frac{dz_1}{dz}.$$

Hier ist das Argument des ersten Bruches gleich dem Winkel von dw nach dw_1, dasjenige des zweiten gleich dem Winkel

Digitized by Google

von dz nach dz_1. Die Gleichung drückt also folgenden Satz aus:

Wenn wir mit Hülfe der Gleichung $w = f(z)$, wo f eine beliebige Funktion ist, die z-Ebene auf einer anderen, der w-Ebene, abbilden, so ist die Abbildung konform.

Umgekehrt wird eine konforme Abbildung der z-Ebene und der w-Ebene auf einander w als Funktion von z, und z als Funktion von w bestimmen, denn die Ähnlichkeit der Ebenen in den unendlich kleinen Teilen bringt die Gleichung (6) mit sich, die ausdrückt, dass der Differentialquotient unabhängig ist von der Richtung der Zunahme. Wir sehen also, dass wenn w eine Funktion von z ist, auch z eine Funktion von w ist; die beiden Funktionen heissen jede die ***umgekehrte*** Funktion der anderen.

Die konforme Abbildung zeigt auch, dass, wenn w eine Funktion von w_1 und w_1 eine Funktion von z ist, auch w eine Funktion von z ist.

Die Punkte, in denen $f'(z)$ Null oder unendlich ist, sind singuläre Punkte, für welche die Abbildung nicht konform wird; sind alle abgeleiteten Funktionen Null bis zu derjenigen von der Ordnung p, die endlich ist und nicht Null, so erhält man statt der Gleichung (6) die folgende:

$$\frac{dw_1}{dw} = \left(\frac{dz_1}{dz}\right)^p,$$

aus der hervorgeht, dass die Winkel, die ihren Scheitelpunkt in z haben, bei der Abbildung mit p multipliciert werden. Betrachten wir z als Funktion von w, so wird die Abgeleitete im Punkte w unendlich werden, und die Winkel, die ihren Scheitelpunkt in w haben, werden bei der Abbildung durch p dividiert.

Die Punkte, für welche die Abgeleitete Null ist, spielen im Allgemeinen keine wesentliche Rolle bei der Untersuchung der Funktion, und sie werden deshalb in der Regel nicht zu ihren singulären Punkten gerechnet; sie bestimmen dagegen singuläre Punkte für die umgekehrte Funktion und bei der konformen Abbildung.

Digitized by Google

Soll man einen Punkt untersuchen, in dem z oder w unendlich ist, so führt man den reciproken Wert ein; dadurch werden, wie früher gezeigt, die Winkel nicht verändert.

Beispiel. $$w = z^2.$$

Man hat $$u + iv = (x + iy)^2,$$

also $$u = x^2 - y^2; \quad v = 2xy,$$

wo u und v die rechtwinkeligen Koordinaten in der w-Ebene sind. Die beiden Gleichungen zeigen, dass die gleichseitigen Hyperbeln in der z-Ebene, $x^2 - y^2 = \text{Const.}$ und $2xy = \text{Const.}$, als zwei Systeme von Parallelen abgebildet werden, $u = \text{Const.}$ und $v = \text{Const.}$ Hieraus schliesst man, dass die beiden Systeme von Hyperbeln sich unter rechten Winkeln schneiden oder orthogonale Trajektorien von einander sind.

Einem gegebenen Punkte (u, v) entsprechen zwei Werte von z, d. h. zwei reelle Schnittpunkte für die beiden entsprechenden Hyperbeln. Die beiden anderen Schnittpunkte dieser Hyperbeln haben komplexe Koordinaten, die $x + iy$ dieselben Werte geben müssen wie die reellen, da z nur zwei Werte hat.

Die singulären Punkte sind die Punkte 0 und ∞. In dem ersten ist $f'(z) = 0$, während $f''(z) = 2$ ist. Die Winkel an diesem Punkte werden deshalb bei der Abbildung verdoppelt; bei dem zweiten Punkte erhält man, wenn man die reciproken Werte w_1 und z_1 einführt,

$$w_1 = z_1^2,$$

so dass dieser Punkt sich wie der Punkt 0 verhält. Es wird das Bild von der Axe der reellen Zahlen bestimmt durch

$$u = x^2, \; v = 0,$$

woraus hervorgeht, dass wenn der Punkt z von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, der Punkt w sich von $+\infty$ bis 0 bewegt und von da nach $+\infty$ zurückkehrt. Der Winkel π im Punkte 0 wird also bei der Abbildung verdoppelt.

Digitized by Google

Die Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, oder richtiger ihr eines Blatt, wird als der Kreis $u^2 + v^2 = 2a^2u$ abgebildet. Die Winkel im Nullpunkte sind beziehungsweise $\frac{\pi}{2}$ und π.

UNSTETIGKEITSSTELLEN.

7. Es sind dies singuläre Punkte in welchen die Funktion unstetig ist; nach einer von *Weierstrass* eingeführten Bezeichnung werden sie in *unwesentliche* und *wesentliche* geteilt. Die ersteren, die auch *Pole* genannt werden, sind solche Punkte, in denen *die Funktion unendlich wird, während ihr reciproker Wert stetig im Bereich des Punktes ist.* In einem *wesentlichen* singulären Punkte ist der Funktionswert in Wirklichkeit unbestimmt, da er von dem Wege abhängt, auf dem man sich dem Punkte nähert. Dasselbe muss dann vom reciproken Werte der Funktion gelten. Wir werden später sehen, dass algebraische Funktionen keine wesentlichen singulären Punkte haben, während eine transcendente Funktion immer mindestens einen solchen Punkt besitzt; dieses kann der Punkt ∞ sein, und der Satz sagt dann in Wirklichkeit aus, dass man, indem man z auf verschiedenen Wegen bis ins Unendliche wachsen lässt, verschiedene Grenzwerte für die Funktion erhalten kann.

Beispiel 1. Die Funktion $\frac{z^3}{(z-a)(z-b)}$ wird unendlich in den Punkten a, b und ∞, und diese Punkte sind Pole, da der reciproke Wert des Bruches in ihnen Null ist und stetig in ihrer Umgegend.

Beispiel 2. Die Funktion $w = e^z$ ist endlich und stetig für alle endlichen Werte von z; setzt man

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

so erhält man

$$e^z = e^{r\cos\theta} e^{ir\sin\theta},$$

worin der zweite Faktor den absoluten Betrag 1 hat, während der erste bis ins Unendliche mit r wächst, wenn $\cos\theta$ einen kon-

Digitized by Google

stanten positiven Wert hat, gegen Null abnimmt, wenn r bis ins Unendliche wächst, während $\cos\theta$ negativ ist, und unbestimmt wird für $r = \infty$ und $\cos\theta = 0$. Die Funktion hat also in ∞ einen wesentlichen singulären Punkt. Dasselbe gilt von $\sin z$, $\cos z$ und $tg\, z$, aber während die beiden ersten endlich sind für alle endlichen Werte von z, hat die letzte Pole in allen den Punkten, in denen $\cos z$ Null ist.

Lassen wir in $w = e^z$ z sich ins Unendliche entfernen auf der Spirale

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{r},$$

wo m eine beliebige positive Zahl bedeutet, so erhält man

$$w = e^{r\left(\sin\frac{m}{r} + i\cos\frac{m}{r}\right)}$$

woraus man ersieht, dass w, wenn r ins Unendliche wächst, sich asymptotisch einem Kreise nähert, der bestimmt ist durch

$$w = e^m\,(\cos r + i\sin r)$$

und also jedem beliebigen Wert mit dem absoluten Betrage e^m unendlich oft unendlich nahe kommt.

KAPITEL II.

EIN- UND MEHRWERTIGE FUNKTIONEN. RIEMANNSCHE FLÄCHEN.

RATIONALE FUNKTIONEN.

8. Die Funktion

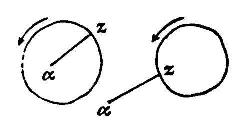
$$w = z - a$$

ist einwertig, denn jedem Werte von z entspricht ein Wert von w.

Lassen wir z sich stetig bewegen, so muss auch w sich stetig bewegen, und wenn der Punkt z an seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt ist, nachdem er eine geschlossene Kurve

Digitized by Google

in positiver Richtung beschrieben hat, so muss w auch eine geschlossene Kurve beschrieben haben. Wenn wir indessen die stetigen Veränderungen des Argumentes von w betrachten, so ergiebt sich ein Unterschied, je nachdem der feste Punkt α innerhalb oder ausserhalb der von z beschriebenen Kurve liegt. Im ersten Falle wird nämlich eine Gerade von α nach z, die der Grösse und Richtung nach w darstellt, sich einmal herum gedreht haben, so dass das Argument von w eine Zunahme von 2π erfahren hat. Im zweiten Falle ist diese Zunahme Null, da das Argument während der Bewegung gleich grosse positive und negative Zunahmen erhalten hat.



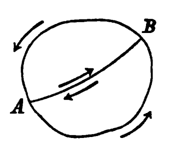
Die rationale ganze Funktion vom $n$ten Grade

$$w = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$$

ist auch einwertig. Beschreibt z eine geschlossene Kurve, so muss das Argument von w eine Zunahme erfahren, die gleich der Summe der Zunahmen ist, welche die Argumente der einzelnen Faktoren erhalten; die Zunahme wird also $2k\pi$, wenn die in positiver Richtung von z durchlaufene Kurve k von den Punkten α umschliesst. (Satz von *Cauchy*).

Es sei $w = f(z)$ eine Funktion, die eindeutig und stetig in einem gewissen Flächenstück ist, und die in diesem Flächenstück und auf seiner Begrenzung nicht Null werden kann. Dann lässt sich nachweisen, dass Arg. w die Zunahme Null erfährt, wenn z um das Flächenstück herumgeht.

Wir teilen das Flächenstück durch eine beliebige Linie AB in zwei Teile. Die Zunahme des Argumentes wird dann gleich der Summe der Zunahmen, die es dadurch erfährt, dass z positiv um die beiden kleineren Flächenstücke herumgeht; dadurch wird nämlich die hinzugefügte Linie zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, und die diesen entsprechenden Zunahmen heben einander auf. Wenn der Satz nun nicht für das gegebene Flächenstück gilt, so muss, da die Zunahme nur ein Vielfaches von 2π sein kann, jedenfalls unter den kleineren Flächenstücken eines sein, für das er nicht gilt. Dieses lässt sich nun auf dieselbe Weise behandeln u. s. w.;



Digitized by Google

daraus ersehen wir, dass es genügt zu beweisen, dass der Satz für ein Flächenstück gilt, welches wir uns so klein denken können, wie wir wollen.

Nun sei z_0 ein Wert mit dem entsprechenden Funktionswert w_0, wo $|w_0|$ nicht Null ist. Wegen der Stetigkeit der Funktion kann man dann eine Zahl ϱ so bestimmen, dass für $|z-z_0| \leqq \varrho$ auch $|w-w_0| < |w_0|$. Beschreibt z eine geschlossene Kurve, auf welcher überall $|z-z_0| < \varrho$, so muss w eine geschlossene Kurve beschreiben, die den Nullpunkt nicht enthält, und das Argument von $w-w_0$ kann dann keinen Zuwachs erfahren haben.

Der Satz gilt für eine ganze algebraische Funktion, da eine solche stetig in jedem endlichen Teil der Ebene ist. Seine Richtigkeit folgt unmittelbar aus dem oben bewiesenen Satz von *Cauchy*, sobald man voraussetzt, dass eine ganze rationale Funktion sich immer in Faktoren vom ersten Grade zerlegen lässt; wir haben diesen Satz oben nicht benutzt, da wir das Entwickelte benutzen wollten, um ihn zu beweisen.[1]).

Da wir gesehen haben, dass wir, wenn wir ein Flächenstück umkreisen, in dem die Funktion keinen Nullpunkt hat, das Argument der Funktion nicht verändern, so können wir nämlich jetzt den Satz von *Cauchy* umkehren und erhalten dann, indem wir einen Nullpunkt a $p$mal mitzählen, wenn $(z-a)^p$ Faktor ist:

Erfährt das Argument einer ganzen rationalen Funktion die Zunahme $2k\pi$, wenn z eine geschlossene Kurve beschreibt, so hat die Funktion innerhalb dieser Kurve gerade k Nullpunkte.

Wir wollen nun die Anzahl der Nullpunkte für die ganze rationale Funktion

$$Az^n + Bz^{n-1} + \ldots + K$$

suchen, und lassen deshalb z einen Kreis um den Anfangspunkt als Mittelpunkt beschreiben. Da alle Nullpunkte im Endlichen liegen müssen, so können wir uns den Radius so gross denken, dass der Kreis sie alle umschliesst. Setzen wir

---

[1]) *Briot* et *Bouquet:* Theorie des fonctions elliptiques.



$z=\frac{1}{u}$, so wird z den grossen Kreis in positiver Richtung beschreiben, wenn wir u einen diesem entsprechenden sehr kleinen Kreis um den Anfangspunkt in negativer Richtung beschreiben lassen. Nun ist die Funktion, wenn u eingeführt wird,

$$\frac{A+Bu+\ldots+Ku^n}{u^n};$$

durch die Bewegung von u erfährt das Argument des Zählers keine Zunahme, da der Zähler keinen Nullpunkt innerhalb des kleinen Kreises hat; das Argument des Nenners erhält dagegen die Zunahme $-2n\pi$; für den Bruch, also auch für die gegebene Funktion, ist die Zunahme daher $2n\pi$. Dadurch haben wir bewiesen, dass die gegebene Funktion vom $n$ten Grade eben n Nulpunkte hat.

Eine Funktion heisst *holomorph* innerhalb eines gewissen Flächenstückes, wenn sie in diesem Flächenstück einer ganzen rationalen Funktion dadurch gleicht, dass sie überall eindeutig und stetig ist.

9. Die allgemeine gebrochene rationale Funktion

$$w=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots}{b_0z^p+b_1z^{p-1}+\ldots},$$

die unverkürzbar gedacht wird, hat Nullpunkte in den n Nullpunkten des Zählers und Pole in den p Nullpunkten des Nenners. Um den Punkt ∞ zu untersuchen, setzen wir $z=\frac{1}{u}$. Ist $p>n$, so zeigt eine Multiplikation von Zähler und Nenner mit u^p, dass $u=0$ oder $z=\infty$ $(p-n)$mal Nullpunkt ist; für $n>p$ sehen wir auf dieselbe Weise, dass $z=\infty$ $(n-p)$mal Nullpunkt für $\frac{1}{w}$ ist, und wir sagen deshalb, dass der Punkt $(n-p)$mal Pol für w ist, oder dass w $(n-p)$mal unendlich im Punkt ∞ wird. Für $n=p$ erhält w im Punkte ∞ den Wert $a_0:b_0$. Das Resultat ist also, dass der Bruch in allen Fällen gleich viele Male Null und unendlich wird, nämlich so oft, als die grösste von den Zahlen n und p angiebt. Da der Bruch jedesmal einen beliebigen Wert k erhält, sobald die Funktion $w-k$ Null ist, und diese, wie man sieht, sobald man ihr Bruch-

Digitized by Google

form giebt, ebenso oft Null wird wie w, so lässt sich der Satz folgendermassen ausdrücken:

Eine rationale Funktion nimmt alle Werte gleich viele Male an.

Eine Funktion heisst *meromorph* in einem gewissen Teil der Ebene, wenn sie in diesem einer rationalen gebrochenen Funktion dadurch gleicht, dass sie eindeutig und stetig ist mit Ausnahme gewisser Punkte, die Pole sind.

Sagen wir im Folgenden, dass eine Funktion gewisse Eigenschaften in der ganzen Ebene oder auf der ganzen Kugel besitzt, dass sie z. B. holomorph oder meromorph ist, so meinen wir in dem ersten Falle, dass die Eigenschaft für alle endlichen z stattfindet, während wir im zweiten Falle $z = \infty$ mitrechnen.

MEHRWERTIGE FUNKTIONEN.

10. Wenn eine Funktion, $w = f(z)$, so difiniert ist, dass jedem Werte von z mehrere Werte von w entsprechen, so heisst die Funktion *mehrwertig.* Eine *algebraische* Funktion wird als Wurzel einer algebraischen Gleichung definiert, deren Koefficienten ganze rationale Funktionen von z sind. Ist die Gleichung vom $n$ten Grade, so haben wir hier ein Beispiel für eine n-wertige Funktion. In $\log z$, $\arcsin z$ u. s. w. haben wir Beispiele für Funktionen mit unendlich vielen Werten. Wir wollen uns im Folgenden denken, dass unsere Funktion eine endliche Anzahl von Werten hat, aber unsere Untersuchungen werden im Allgemeinen eben so gut für eine unendliche Anzahl von Werten gelten.

Es sei z_1 ein beliebig gewählter Wert von z und ihm mögen die Funktionswerte $w_1, w_2, \dots w_n$ entsprechen. Indem wir mit z_1 anfangen, lassen wir z eine beliebige geschlossene Kurve beschreiben, von der wir jedoch voraussetzen wollen, dass sie durch keinen singulären Punkt geht.

Da die Funktion stetig ist, so werden die Punkte w sich gleichzeitig mit z stetig bewegen und n der geschlossenen Kurve entsprechende *Zweige* beschreiben; von diesen wissen wir, dass sie in den Punkten $w_1, w_2, \dots w_n$ endigen müssen, da es keine

Digitized by Google

anderen Punkte giebt, die z_1 entsprechen, aber wir wissen nicht, in welchen von diesen Punkten die verschiedenen Zweige endigen. Es ist möglich, dass der Zweig, der in w_1 beginnt, auch in w_1 endigt, so dass dieser Zweig eine geschlossene Kurve bildet, aber es ist auch möglich, dass er in einem anderen von den Punkten endigt. Da die Funktion n Werte hat, so müssen alle Punkte als Endpunkte auftreten, und zwar jeder für einen Zweig; da zugleich jeder Punkt Anfangspunkt für einen Zweig ist, so müssen alle Zweige zusammen ein System von geschlossenen Kurven bilden, aber von der Anzahl dieser lässt sich nur sagen, dass sie wenigstens 1 und höchstens n beträgt. Wir wollen nun versuchen einen genaueren Einblick in diese Verhältnisse zu gewinnen. Hier erhalten namentlich solche Werte von z Bedeutung, für welche zwei oder mehrere der Funktionswerte zusammenfallen. Die entsprechenden Punkte in der Ebene von z heissen mit einer Ausnahme, die später erwähnt werden wird, *Verzweigungspunkte (Riemann)* oder *kritische* Punkte *(Hermite)*. Wenn z sich einem Verzweigungspunkte nähert, so werden sich zwei oder mehrere von den Punkten w einander nähern, während sie sonst von einander wohl getrennt sind. Einem Verzweigungspunkt in der z-Ebene entspricht in der w-Ebene ein Punkt, in dem sich zwei oder mehrere Zweige schneiden.

Nun möge z eine kleine geschlossene Kurve beschreiben, die nicht am Verzweigungspunkte liegt; die Funktionswerte liegen dann von einander wohl getrennt; der Stetigkeit wegen müssen die Punkte w kleine Kurvenstücke beschreiben, die, wenn der Weg von z hinreichend klein genommen wird, nicht von einem der Ausgangspunkte bis zu einem der anderen reichen können; jeder der kurzen Zweige muss dann in seinem eigenen Ausgangspunkt endigen, und jeder einzelne Funktionswert beschreibt also eine geschlossene Kurve. Ein Pol, der nicht zugleich Verzweigungspunkt ist, spielt keine besondere Rolle, denn setzen wir in einem solchen Punkt $w = \frac{1}{u}$, so müssen w und u gleichzeitig geschlossene Kurven beschreiben, und u ist der Definition gemäss stetig im Bereich des Poles. Von

Digitized by Google

wesentlichen singulären Punkten wollen wir hier absehen; diese verlangen bei der Behandlung transcendenter Funktionen eine besondere Untersuchung.

Wir wollen nun zu dem kleinen von z umkreisten Flächenstück ein anderes hinzufügen, und zwar so, dass die beiden Flächenstücke ein Stück der Randkurve gemeinsam haben. Für das hinzugefügte Flächenstück gelten dieselben Betrachtungen wie für das ursprüngliche, und da ein successives Umkreisen der beiden Flächenstücke durch ein Umkreisen des Gesamtareals ersetzt werden kann, so wird auch bei einem solchen jeder der Funktionswerte eine geschlossene Kurve beschreiben. Dies wird seine Gültigkeit behalten, wenn wir die Erweiterung der Kurve fortsetzen, solange wir dabei nicht einen Verzweigungspunkt erreichen. Wenn ein hinzugefügtes kleines Flächenstück einen solchen enthält, so gilt unser Beweis nicht, da in der Nähe eines solchen wenigstens zwei der entsprechenden Funktionswerte sehr nahe gleich gross werden. Während im Allgemeinen jeder Zweig auf bestimmte Weise fortgesetzt wird, so wird man, wenn man an einen Verzweigungspunkt gelangt, wo zwei Zweige sich schneiden, auf zwei Arten fortfahren können ohne die Stetigkeit zu gefährden.

Dass Resultat unserer Untersuchung ist also folgendes:

Wenn z ein Flächenstück umkreist, das keinen Verzweigungspunkt enthält, oder mit anderen Worten, wenn z eine geschlossene Kurve beschreibt, die sich durch stetige Änderung in einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne dass dabei ein Verzweigungspunkt passiert wird, so werden alle entsprechenden Zweige geschlossene Kurven sein; beginnen wir also mit einem gewissen Funktionswert, so werden wir mit demselben Werte enden.

Schliesst die Kurve dagegen einen Verzweigungspunkt ein, so sind vielleicht zwei oder mehrere der Zweige keine geschlossenen Kurven. Wir können also dann mit einem anderen Funktionswerte endigen als der ist, mit dem wir begonnen haben.

Wenn für einen gewissen Wert von z zwei oder mehrere Funktionswerte zusammenfallen, so kann es sich doch ereignen, dass jeder von den Funktionswerten in sich selbst übergeht,

Digitized by Google

sobald z eine kleine geschlossene Kurve um den Punkt beschreibt; *ist dieses der Fall, so wird der Punkt nicht mit unter die Verzweigungspunkte gerechnet.*

Beispiel 1. $$w = \sqrt[n]{z - a}.$$

Die Funktion hat n Werte, die in einen zusammenfallen für $z = a$ und $z = \infty$. Diese beiden Punkte sind Verzweigungspunkte. Beschreiben wir um $z = a$ eine geschlossene Kurve in positiver Richtung, so wird, wie früher gezeigt, Arg. $(z - a)$ die Zunahme 2π erfahren, das Argument zu jedem der Werte von w also die Zunahme $\frac{2\pi}{n}$. Lassen wir z. B. die geschlossene Kurve einen Kreis um a mit dem Radius 1 sein, so werden die n Werte von w auf einem Kreise mit $w = 0$ als Mittelpunkt und dem Radius 1 liegen, und zwar so, dass sie die Peripherie in n gleiche Teile teilen. Wenn z seine ganze Kreisperipherie beschreibt, so werden die Funktionswerte jeder $\frac{1}{n}$ der Kreisperipherie beschreiben, also jeder von den Zweigen dort enden, wo der nächste beginnt. Indem der Punkt z in positiver Richtung um den Punkt a geht, geht er ebensowohl um den Punkt ∞, aber in negativer Richtung, der Punkt ∞ ist deshalb ein Verzweigungspunkt von derselben Art wie der Punkt a. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man die reciproken Werte von w und z einführt.

Wenn die Kurve beide Verzweigungspunkte einschliesst, so ist das dasselbe, als wenn sie keinen von ihnen einschliesst, da die Kurve ebensowohl Randkurve für den einen Teil der Kugelfläche ist wie für den anderen. In diesem Falle erfährt Arg. $(z - a)$ keine Zunahme, und dasselbe muss dann für die Werte von w gelten, so dass alle Zweige geschlossene Kurven werden.

Wir machten hier eine Bemerkung, die übrigens allgemein gilt, nämlich diejenige, dass man von einer Kurve, die alle Verzweigungspunkte einschliesst, ebensowohl sagen kann, dass sie keine einschliesst. Noch allgemeiner kann man sagen, dass man, wenn man einige der Verzweigungspunkte umkreist, gleich-

Digitized by Google

zeitig die übrigen in entgegengesetzter Richtung umkreist. Hieraus lässt sich schliessen, dass es keine Funktionen mit nur einem Verzweigungspunkte giebt, da ein solcher Fall zu verschiedenen Resultaten führen würde, je nachdem man die Kurve als Randkurve für den einen oder den anderen Teil der Kugelfläche betrachtete.

Beisp. 2. $w = \sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)}.$

Die Funktion hat zwei Werte, die gleich gross sind, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Jeder von den Punkten α ist ein Verzweigungspunkt, denn lässt man beispielsweise z einen kleinen Kreis um α_1 beschreiben, so wird Arg. $(z-\alpha_1)$ um 2π grösser, während die übrigen analogen unverändert bleiben. Arg. w wird deshalb um π grösser, was soviel heisst, dass die Funktion das Zeichen wechselt. Umkreist z zwei von den Nullpunkten, so bleibt die Funktion unverändert. Fallen die beiden Punkte in einen zusammen, so ist dieser also kein Verzweigungspunkt.

Um den Punkt ∞ zu untersuchen, setzen wir $z = \frac{1}{u}$ und erhalten

$$w = \frac{\sqrt{(1-\alpha_1 u)(1-\alpha_2 u)\ldots(1-\alpha_n u)}}{u^{\frac{n}{2}}}.$$

Nun lassen wir w einen kleinen Kreis um den Nullpunkt beschreiben; dabei behält der Zähler seinen Wert, da alle seine Verzweigungspunkte ausserhalb des kleinen Kreises liegen. Der Nenner wechselt das Zeichen, wenn n ungerade ist, bleibt aber unverändert wenn n gerade ist. Der Punkt ∞ ist also im ersten Falle ein Verzweigungspunkt, im letzten ein einfacher Pol.

Beisp. 3. $w = (z-a)\sqrt{z-b}.$

Die Verzweigungspunkte sind b und ∞, während a kein Verzweigungspunkt ist. Geht z durch a, so wird der Wert sich auf eine bestimmte Art verändern, denn der erste Faktor ist eindeutig, und der zweite kann sein Vorzeichen nicht wechseln ohne einen endlichen Sprung zu machen.

Digitized by Google

BESTIMMUNG DER VERZWEIGUNGSPUNKTE.

11. Die Funktion möge bestimmt werden durch eine algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(w, z) = 0.$$

Diejenigen Werte von z, für welche diese Gleichung gleiche Wurzeln erhält, werden bestimmt, indem wir w aus der gegebenen Gleichung und

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

eliminieren, und die dabei entstandene Gleichung in z auflösen. Zwischen den so bestimmten Punkten müssen die Verzweigungspunkte enthalten sein; möglicherweise kann jedoch der Punkt ∞ noch hinzukommen. Die gefundenen Punkte müssen nun besonders untersucht werden, und diese Untersuchung fällt im Wesentlichen zusammen mit der Untersuchung merkwürdiger Punkte auf einer algebraischen Kurve.

Es sei z_1 einer der gefundenen Punkte, und es mögen einige der entsprechenden Funktionswerte in w_1 zusammenfallen. $w-w_1$ lässt sich dann in einer Reihe nach Potenzen von $z-z_1$ entwicklen, und wir können nach einer bekannten Methode das erste, oder, wenn es nötig sein sollte, einige der ersten Glieder der Reihenentwickelung finden.[1])

Wenn nun die Reihe nach Potenzen von $(z-z_1)^{\frac{1}{q}}$ fortschreitet, so bestimmt sie, den q Werten von $(z-z_1)^{\frac{1}{q}}$ entsprechend, q ***Funktionszweige***, und diese q Zweige gehen durch cyklische Vertauschung in einander über, wenn z den Punkt z_1 umkreist. Möglicherweise wird die Anzahl der in w_1 zusammenfallenden Zweige dadurch nicht erschöpft; die fehlenden Zweige werden dann durch ähnliche Reihen bestimmt. Alle in w_1

[1]) Die Reihenentwickelung wird später untersucht; hier wird nur davon Gebrauch gemacht, dass $w-w_1$ sich ausdrücken lässt durch die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern und einen Rest, der in der Nähe des Punktes z_1 verschwindend ist im Verhältnis zu den mitgenommenen Gliedern.


Digitized by Google

zusammenfallenden Zweige zerfallen also in Gruppen, derartig, dass diejenigen, welche derselben Gruppe angehören, cyklisch vertauscht werden, wenn z den Punkt z_1 umkreist. Eine Gruppe kann aus einem einzelnen Zweige gebildet werden, wenn nämlich dieser durch eine Reihe mit ganzen Exponenten bestimmt wird. Dieser Funktionswert verhält sich dann in der Nähe von z_1 wie eine rationale Funktion. Die einzelnen Entwickelungen müssen so lange fortgesetzt werden, bis man so viele Zweige bestimmt hat, als in w_1 zusammenfallen. Fallen andere dem Punkte z_1 entsprechende Zweige in einem Punkte w_2 zusammen, so werden diese auf dieselbe Weise behandelt, und eine ähnliche Untersuchung wird dann mit den übrigen Werten von z vorgenommen.

12. Betrachten wir $f(w,z)=0$ als die Gleichung einer Kurve in rechtwinkeligen Koordinaten, so wird $\frac{\partial f}{\partial w}=0$ diejenigen Punkte bestimmen, die eine Tangente senkrecht zur z-Axe haben. Für solche Punkte hat die Entwickelung im Allgemeinen die Form

$$w-w_1=A(z-z_1)^{\frac{1}{2}}+\dots$$

Ist zugleich $\frac{\partial f}{\partial z}=0$, so wird der Punkt ein Doppelpunkt; hier hat in der Regel jeder Zweig seine Reihenentwickelung mit ganzen Exponenten, und der Punkt z ist deshalb kein Verzweigungspunkt; wir erhalten jedoch wieder gebrochene Exponenten, wenn der Punkt eine Spitze ist. Der Doppelpunkt im Blatt des *Descartes* liefert zwei Reihenentwickelungen, die eine mit ganzen, die andere mit gebrochenen Exponenten; die erste bestimmt einen Zweig, der unverändert bleibt, die zweite 2 Zweige, die vertauscht werden, wenn z den Punkt umkreist.

Bei Untersuchung einer mehrdeutigen Funktion kann es zweckmässig sein, die entsprechende algebraische Kurve zu betrachten, da diese ein anschauliches Bild von den Variablen liefert, so lange sie reell sind.

Um die Anzahl der Verzweigungspunkte zu bestimmen haben wir zu beachten, dass die Anzahl von Tangenten mit

Digitized by Google

gegebener Richtung $n(n-1)$ beträgt, dass aber hierbei eine Gerade durch einen gewöhnlichen Doppelpunkt als zwei, eine solche durch eine Spitze als drei Tangenten gezählt wird. Da nun ein Doppelpunkt keinem, und eine Spitze nur einem Verzweigungspunkt entspricht, so wird die Anzahl von Verzweigungspunkten gleich

$$n(n-1)-2d-2e,$$

worin d die Anzahl der Doppelpunkte, und e diejenige der Spitzen bezeichnet. Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass von einfachen Verzweigungspunkten die Rede ist, das heisst von solchen, wo nur zwei Zweige zusammenfallen.

13. Zum Ausgangspunkt für die Funktionswerte wählen wir nur einen beliebigen Punkt z_1, dem n endliche verschiedene Funktionswerte entsprechen, die wir mit $w_1, w_2, \ldots w_n$ bezeichnen. Ferner nehmen wir vom Punkt z_1 an, dass er nicht mit zwei von den Verzweigungspunkten auf einer Geraden liegt. Eine geschlossene Kurve, die in z_1 beginnt und endet und nur einen Verzweigungspunkt A einschliesst, lässt sich in eine *Schleife* zusammenziehen; hiermit meinen wir einen Weg, der in z_1 beginnt, in einer Geraden nahe bis an A geht, darauf in einem kleinen Kreise positiv um A herum und wieder zurück nach z_1 längs der Geraden. Ähnliche Schleifen legen wir von z_1 aus um die übrigen Verzweigungspunkte. Es leuchtet ein, dass jeder geschlossene Weg von z_1 bis zurüch nach z_1 sich durch stetige Veränderung, ohne dass irgendwelcher Verzweigungspunkt überschritten wird, in ein System von Schleifen zusammenziehen lässt, wobei jedoch vielleicht einzelne Schleifen so durchlaufen werden müssen, dass man um den eingeschlossenen Verzweigungspunkt in negativer Richtung geht; in einem System kann dieselbe Schleife mehrere Male vorkommen.

Lassen wir z eine Schleife in positiver Richtung durchlaufen, so werden die Funktionswerte sich stetig ändern, und wenn wir zu z_1 zurückkehren, so sind die dazu gehörenden Funktionswerte auf eine gewisse Weise vertauscht, sie sind einer gewissen *Substitution* unterworfen worden. Ist der Punkt ein einfacher Verzweigungspunkt, so wird die Substitution eine

Digitized by Google

Transposition von zweien der Funktionswerte, und durchlaufen wir die Schleife zweimal, so bleiben alle Werte unverändert. Sind die beiden Werte, die vertauscht werden, w_1 und w_2, so sagt man, dass die Schleife w_1 und w_2 verbinde. Ein Verzweigungspunkt kann so beschaffen sein, dass die Schleife eine ganz beliebige Substitution bewirkt. Sobald ein Weg eine Substitution S mit sich bringt, ein anderer darauf folgender eine Substitution T, so wird der Gesamtweg eine Substitution mit sich bringen, die mit ST bezeichnet wird. In diesem Produkte ist die Reihenfolge der Faktoren in der Regel nicht beliebig.

Die Anzahl von verschiedenen Substitutionen, die allen möglichen Wegen entsprechen, muss natürlich endlich sein. Sind S und T zwei beliebige von ihnen, so müssen ST und TS auch unter ihnen vorkommen; man sagt deshalb, dass alle Substitutionen eine *Gruppe* bilden: diese heisst die ***Monodromiegruppe*** der Gleichung. Zu der Gruppe gehört die identische Substitution, die keine Vertauschung herbeiführt und durch 1 bezeichnet wird.

Wenn wir es dahin gebracht haben, dass jeder Verzweigungspunkt einer gewissen Substitution entspricht, so haben wir wohl zu beachten, dass diese Verbindung abhängig ist von der Form, die wir der Schleife gegeben haben; gehen wir hin zum Punkte und wieder her in einer krummen Linie, die in Verbindung mit der geraden einen oder mehrere Verzweigungspunkte einschliesst, so wird die Substitution eine andere werden können.

14. Wir können nun die Substitution finden, die einem beliebigen geschlossenen Wege entspricht, wenn wir diesen zu Schleifen zusammenziehen. Man zieht es jedoch vor, eine etwas veränderte Betrachtungsweise anzuwenden.

Angenommen, die Schleife um einen Verzweigungspunkt A verbinde w_1 mit w_2. Indem wir in z_1 mit dem Werte w_1 beginnen, führt eine stetige Reihe von Werten uns zurück mit dem Werte w_2. Wir können deshalb die Bezeichnungen w_1 und w_2 nicht für die variierenden Funktionswerte benutzen, denn diese gehen unmerklich in einander über, ohne dass man einen

Digitized by Google

bestimmten Punkt angeben kann, der sie trennt. Wir fingieren jedoch eine solche Trennung; wir ziehen nämlich eine Linie, einen sogenannten *Verzweigungsschnitt*, von A nach ∞; der geschlossene Weg um A muss diese Linie notwendigerweise schneiden,[1]) und indem wir sie in positiver Richtung überschreiten, lassen wir die Funktionswerte die Benennung wechseln. Von jedem der Verzweigungspunkte ziehen wir eine solche Verzweigungslinie nach ∞, und wir führen die zum Punkte gehörige Substitution aus, wenn wir den Verzweigungsschnitt in positiver Richtung passieren, die umgekehrte, wenn wir sie in negativer Richtung passieren. Die Form der Verzweigungsschnitte ist gleichgültig, wenn sie sich nur nicht gegenseitig schneiden.

Wir können nun in z_1 mit einem oder mehreren Funktionswerten beginnen, indem wir z eine beliebige Kurve beschreiben lassen; jedesmal wenn wir einen Verzweigungsschnitt passieren, wenden wir die dazu gehörende Substitution auf unsere Werte an. Wir haben jedoch zu beachten, dass die Bezeichnungen, die wir so nach und nach erhalten, keine wirkliche Bedeutung haben, bevor die Kurve sich schliesst; z_1 ist der einzige Punkt, für den die Bezeichnungen w_1, w_2 ... eine bestimmte Bedeutung haben, nämlich diejenige von gewissen bestimmten komplexen Zahlen.

Wir wollen beispielsweise annehmen, dass wir mit w_1, w_2 und w_3 beginnen und in positiver Richtung drei Verzweigungsschnitte passieren, die beziehungsweise den Substitutionen $(w_1\, w_2)$, $(w_1\, w_4)(w_2\, w_3)$ und $(w_1\, w_2\, w_3)$ entsprechen, wo die Klammern cyklische Verschiebungen bedeuten. Wir beginnen mit w_1, w_2, w_3, und haben dann, nachdem der erste Schnitt passiert ist, w_2, w_1, w_3; nach dem nächsten Übergang erhalten wir w_3, w_4, w_2, und nach dem letzten w_1, w_4, w_3. Dass heisst also, dass wenn wir nun, ohne noch mehr Schnitte zu passieren, nach z_1 gehen, w_1 und w_3 ihre Werte behalten haben, während w_2 zu w_4 geworden ist.

[1]) Auf der Kugel betrachten wir hier der Einfachheit wegen die Sache so, als ob die geschlossene Kurve denjenigen Teil der Kugeloberfläche begrenzt, auf dem der Punkt ∞ nicht liegt.


Digitized by Google

Da gleichzeitig w_4 zu w_2 geworden ist, so hat der ganze Weg die Substitution $(w_2 w_4)$ bewirkt.

15. Bisweilen kann man den Verzweigungslinien eine einfachere Form geben. Die Funktion sei z. B. $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$; hier sind nur zwei Verzweigungspunkte a und b, und zu beiden Verzweigungslinien gehört die Substitution $(w_1 w_2)$, deren Quadrat 1 ist, so dass es gleichgültig ist, ob die geschlossene Kurve beide schneidet oder keine von ihnen. Man kann sie deshalb in jedem anderen Punkte zusammenlaufen lassen als gerade im Punkte ∞. Am einfachsten ist es, sie durch die Verbindungslinie zwischen a und b zu ersetzen. Dieselbe Betrachtung lässt sich anwenden, wenn die Substitutionen, die einigen auf einander folgenden Verzweigungslinien entsprechen, das Produkt 1 haben, wobei man indessen darauf zu achten hat, dass die zusammengezogenen Verzweigungslinien durch die Änderung nicht dahin gebracht werden die übrigen zu schneiden. So kann man für

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

mit den Verzweigungspunkten a, b, c und ∞ diese Punkte zu je zweien verbinden, wenn nur die Verbindungslinien sich nicht schneiden. Die Funktion hat nur zwei Werte, und zu beiden Schnitten gehört die Substitution $(w_1 w_2)$.

RIEMANNSCHE FLÄCHEN.

16. *Riemann* führt die Veranschaulichung der Änderungen einer mehrdeutigen Funktion noch weiter. Um das zu erreichen, denkt er sich die Ebene oder Kugelfläche, in der z sich bewegt, durch so viele dicht neben einander liegende Ebenen oder Kugelflächen (Blätter) ersetzt, als die Funktion Werte hat. Der Punkt z kann sich nun in allen diesen Ebenen bewegen, und wenn man einen bestimmten Punkt z angeben will, so genügt es nicht auf gewöhnliche Weise den dem komplexen Werte entsprechenden Punkt anzugeben, sondern man muss zugleich diejenige von den Ebenen bezeichnen, in der man sich den Punkt zu denken hat; einem bestimmten komplexen

Digitized by Google

Werte entsprechen also n Punkte, die dicht über einander liegen.

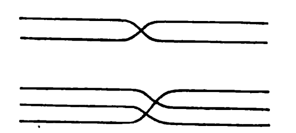
Wir denken uns nun, dass wir für eine n-deutige Funktion auf die oben angegebene Weise einen Ausgangspunkt z_1 mit den dazu gehörenden Werten von w bestimmt haben, und dass wir ferner Verzweigungsschnitte gelegt und die entsprechenden Substitutionen bestimmt haben. Wir lassen dann jeden der n Werte von w einem der n Punkte z_1 entsprechen, z. B. so, dass w_1 dem Punkte z_1 entspricht, der in dem untersten Blatt (Blatt 1) liegt, w_2 dem Punkte, der in dem nächstuntersten Blatt liegt, u. s. w. Wir gehen darauf aus uns so einzurichten, dass, wenn einer von diesen Punkten mit dem ihm entsprechenden Funktionswerte sich stetig bewegt, er dann jedesmal zu z_1 in derjenigen Ebene zurükkehren muss, die dem Funktionswerte, mit dem wir endigen, entspricht. Wir müssen also dafür sorgen uns so zu bewegen, dass wir immer die Funktionsbenennung w_1 haben, wenn der Punkt z sich in dem untersten Blatte befindet, w_2 wenn er sich in dem nächsten befindet, u. s. w. Da nun die Benennungen wechseln, wenn wir einen Verzweigungsschnitt passieren, so müssen wir, wenn wir einen solchen Schnitt passieren, die Punkte z auf andere Blätter auf die durch die entsprechende Substitution bestimmte Weise hinüberspringen lassen.

Beispielsweise möge der von einem Verzweigungspunkt A ausgehende Schnitt die Substitution $(w_1\ w_2)$ haben. Wir beginnen mit z im untersten Blatt, und der zugehörige Funktionswert heisse w_1 bis wir an den Verzweigungsschnitt gelangen; indem wir diesen passieren, springt z auf das nächste Blatt hinauf, und der Funktionswert heisst nun w_2. Gehen wir darauf, ohne andere Schnitte zu passieren, nach z_1, so gelangen wir dahin, während z in dem zweiten Blatt liegt, also mit dem Werte w_2. Hätten wir mit z im zweiten Blatte begonnen, so würde z beim Schnitte in das erste Blatt hinuntergesprungen sein; beginnen wir mit z in einem der übrigen Blätter, so gleitet der Punkt ohne Sprung hinüber.

Wir wollen indessen eine stetige Bewegung von z haben und müssen deshalb die Sprünge des Punktes zu vermeiden

Digitized by Google

suchen. Um das zu erreichen, lassen wir in dem angeführten Beispiel das erste und zweite Blatt im Verzweigungspunkte zusammenhängen; wir schneiden darauf diese beiden Blätter durch längs des Verzweigungsschnittes, und fügen die Ränder wieder derartig zusammen, das der vorderste Rand des ersten Blattes mit dem hintersten Rande des zweiten Blattes vereinigt wird, und umgekehrt. Dadurch erreichen wir, dass die Punkte bei dem Verzweigungsschnitte stetig in die neuen Blätter hinübergleiten, wo sie zu Hause gehören.



Man behandelt alle Verzweigungschnitte auf ähnliche Weise; in den Verzweigungspunkten lässt man diejenigen Blätter zusammenhängen, deren zugehörige Funktionswerte demselben Cyclus angehören, und ein solcher Cyclus bestimmt auch die neue Verbindung zwischen den Blättern nach ihrer Durchschneidung.

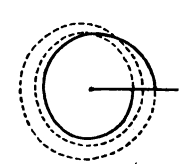
Es sei z. B. die zum Verzweigungspunkte gehörige Substitution $(w_1\, w_2\, w_6)\, (w_3\, w_5)$. Im Verzweigungspunkte müssen dann die Blätter 1, 2, 6 zusammenhängen, und ebenso 3 und 5. Man hat hier wohl zu beachten, dass das Blatt 4, obwohl es zwischen den zusammenhängenden Blättern liegt, dennoch nicht als mit einem der übrigen Blätter zusammenhängend gedacht werden darf. Der Punkt gleitet von Blatt 2 hinüber auf Blatt 6, als ob die dazwischen liegenden Blätter gar nicht vorhanden wären.

Da die Punkte, die gerade über einander in den verschiedenen Blättern liegen, als verschiedene Punkte betrachtet werden müssen, so ist eine Kurve nur dann geschlossen, wenn sie in demselben Blatt und in demselben Punkte endigt, in dem sie beginnt; endigt sie in einem der gerade unter oder über diesem liegenden Punkte, so heisst sie *anscheinend geschlossen.* Lassen wir in dem angeführten Beispiel z von Blatt 1 ausgehen, also mit dem Funktionswerte w_1, und gehen wir einmal um den Verzweigungspunkt herum, so kehren wir in Blatt 2 zurück; gehen wir von diesem Blatte aus noch einmal herum, so kehren wir in Blatt 6 zurück; erst wenn wir zum dritten Male herum-

Digitized by Google

gehen, sind wir in das Blatt 1 zurückgekehrt, und die Kurve ist geschlossen worden.

Schneidet man um den Verzweigungspunkt ein kleines kreisförmiges Stück heraus, so wird aus den zusammenhängenden Blättern eine Art von Schraubenflächen, die von geschlossenen Kurven begrenzt sind, herausgeschnitten. So geben in unserem Beispiele die Blätter 1, 2 und 6 eine Schraubenfläche, die Blätter 3 und 5 eine andere, während die übrigen Blätter gewöhnliche Kreisflächen geben. Die Schraubenfläche lässt sich auch als eine Kegelfläche mit dem Scheitel im Verzweigungspunkt und der geschlossenen Kurve als Leitkurve auffassen.



Indem wir die Riemannsche Fläche einführen, behalten wir z als Bezeichnung für die Unabhängige, aber man hat ständig zu beachten, dass das gegebene z zu einem bestimmten Blatt gehört; eigentlich ist also der in diesem Blatte liegende Punkt unsere unabhängig Variable geworden, und dadurch haben wir erreicht, dass jedem Punkt der Fläche nur ein Funktionswert entspricht; *die mehrdeutige Funktion ist in eine eindeutige Funktion der Punkte der Fläche verändert worden.*

17. Es sei U eine rationale Funktion von w und z; U muss dann im allgemeinen ebenso viele Werte wie w, und deshalb eine Riemannsche Fläche mit ebenso vielen Blättern haben. Wenn einige von den Werten von w zusammenfallen, so müssen die entsprechenden Werte von U es auch thun, und wenn w eine geschlossene Kurve beschreibt, muss auch U eine geschlossene Kurve beschreiben. Die Riemannsche Fläche für U muss deshalb an den Stellen Verzweigungspunkte haben, wo die Riemannsche Fläche für w solche hat. Auf der anderen Seite lässt sich aus den beiden Gleichungen, derjenigen, welche w, und derjenigen, welche U bestimmt, im allgemeinen eine neue Gleichung ableiten, die mit Bezug auf w vom ersten Grade ist, so dass w rational durch U und z ausgedrückt werden kann. Die beiden Riemannschen Flächen werden deshalb dieselben, und die Funktionen sind nach Riemanns Ausdruck *gleichverzweigt.* In besonderen Fällen kann jedoch U weniger Werte erhalten

Digitized by Google

als w, wenn nämlich die Werte von U zu je zweien oder dreien u. s. w. zusammenfallen. So hat beispielsweise $w = \sqrt[6]{z}$ sechs Werte, während $U = w^3 + z$ nur zwei Werte hat.

18. Wir wollen im besonderen eine solche irreducible Gleichung betrachten, für welche jede Wurzel sich rational durch jede der übrigen ausdrücken lässt. Die durch die Gleichung bestimmte Riemannsche Fläche wird *regulär verzweigt* genannt, weil sie die Eigenschaft hat, dass die Blätter an jedem Verzweigungspunkt zu je zweien oder dreien u. s. w. zusammenhängen. Wir wollen annehmen, das beispielsweise die Wurzeln 1, 2 und 3 an einem Verzweigungspunkt cyklisch verschoben werden. Es existiert eine rationale Transformation, welche die Wurzel 1 in die Wurzel 4 verändert, und diese muss, wie aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist, alle Wurzeln in einander überführen, also z. B. 2 in 3 und 5 in 6 verändern. Nun kann die Transformation, auf die gegebene Gleichung angewandt, diese nicht verändern, da sie nur die Wurzeln unter einander vertauscht. Die Riemannsche Fläche kann deshalb durch die Transformation nicht verändert werden, folglich müssen die Blätter 4, 5 und 6 zusammenhängen ganz in derselben Weise wie 1, 2 und 3.

Beisp. 1. $$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Die Riemannsche Fläche hat 2 Blätter, die in den Verzweigungspunkten a und b zusammenhängen. Der Punkt ∞ ist kein Verzweigungspunkt; die beiden ihm entsprechenden Punkte sind Pole. Der Verzweigungsschnitt lässt sich zwischen a und b ziehen.

Beisp. 2. $$w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Die Punkte a, b, c und ∞ sind Verzweigungspunkte, der letzte zugleich Pol. Die Verzweigungsschnitte lassen sich so legen, dass sie a mit b und c mit ∞ verbinden ohne sich zu schneiden.

Beisp. 3. $$w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}.$$

Die Fläche hat drei Blätter, die alle in a, b und dem Pole

Digitized by Google

∞ zusammenhängen. Die Blätter sind in beiden Schnitten auf dieselbe Art verbunden, so dass die zugehörige Substitution beispielsweise $S = (1\,2\,3)$ ist. Geht man in positiver Richtung über beide Schnitte, so wird die Substitution $S^2 = (1\,3\,2)$ ausgeführt. Dabei ist man in negativer Richtung um ∞ herumgegangen, so dass ein positives Umkreisen um diesen Punkt auch die Substitution S mit sich führt. Dies stimmt dazu, dass ein positives Umkreisen aller drei Punkte die Substitution $S^3 = 1$ herbeiführt.

Beisp. 4. $$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}.$$

Die Verzweigungspunkte sind a und b, in denen alle Blätter zusammenhängen, und die durch einen Verzweigungsschnitt verbunden werden. Ist α derjenige Wert von $1^{\frac{1}{3}}$, dessen Argument $\frac{2}{3}\pi$ ist, so werden die Funktionswerte mit α multipliciert, wenn man den Verzweigungsschnitt in einer solchen Richtung überschreitet, dass man a zu Linken hat.

Beisp. 5. $$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c}.$$

Die Funktion hat 6 Werte, die sich als

$$t + u,\quad \alpha t + u,\quad \alpha^2 t + u,\quad t - u,\quad \alpha t - u,\quad \alpha^2 t - u$$

bezeichnen lassen, wenn t und u zwei von den Werten der Wurzelgrössen sind. Verzweigungsschnitte werden von a nach b, und von c nach ∞ gelegt. Zu dem ersten gehört die Substitution $(1\,2\,3)\,(4\,5\,6)$, zu dem zweiten $(1\,4)\,(2\,5)\,(3\,6)$. Die Gruppe der Gleichung wird von der Substitution $(1\,5\,3\,4\,2\,6)$ und ihren Potenzen gebildet. Die Punkte b und ∞ sind Pole.

Beisp. 6. $$w^3 - 3w + 2z = 0.$$

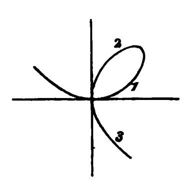
Die Punkte $+1$ und -1 sind Verzweigungspunkte; in dem ersten werden zwei Funktionswerte $+1$, in dem anderen -1. Für $z = \infty$ wird $w = \infty$, und da das zweite Glied gegen das erste verschwindend ist, so lässt sich die Gleichung $w^3 + 2z = 0$

Digitized by Google

schreiben, woraus hervorgeht, dass ∞ ein Verzweigungspunkt ist, in dem alle drei Blätter zusammenhängen. Verzweigungsschnitte werden von $+1$ und -1 nach ∞ gelegt. In $z = 0$ hat w die Werte 0, $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$. Bezeichnet man diese mit 1, 2, 3, so zeigt die Figur der der Gleichung entsprechenden Kurve, dass eine geradlinige Schleife von 0 um 1 gezogen 1 und 2 vertauscht, während die Schleife um -1 die Werte 1 und 3 vertauscht. Der Weg um beide, oder der Weg um ∞ in negativer Richtung liefert deshalb die cyklische Verschiebung (1 2 3). Die Gruppe der Gleichung ist die vollständige Gruppe, die alle 6 Permutationen der 3 Wurzeln enthält.

Beisp. 7. $$w^3 + z^3 = 3\,a\,w\,z.$$

Im Punkte ∞ haben wir $w = z\,(-1)^{\frac{1}{3}}$, woraus hervorgeht, dass der Punkt kein Verzweigungspunkt ist, sondern dass wir dort drei getrennte Pole haben, von denen jeder in seinem Blatt liegt. Die Verzweigungspunkte werden durch $w^2 = az$ bestimmt, woraus sich $z^3\,(z^3 - 4\,a^3) = 0$ ergiebt.



Die Gleichung gehört, auf rechtwinkelige Koordinaten bezogen, zum Blatte des *Descartes*, das einen Doppelpunkt im Anfangspunkte hat. Der Punkt 0 ist gleichwohl Verzweigungspunkt, da die eine Tangente im Anfangspunkt auf die Ordinatenaxe fällt. Wie bekannt sind auch die Reihenentwickelungen für die Wurzeln

$$w = \frac{1}{3\,a} z^2 + \ldots \text{ und } w = \sqrt{3\,a}\, z^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Nehmen wir unseren Anfangspunkt im Punkte z_0, der eine kleine positive Grösse darstellt, und bezeichnen wir die erste Wurzel mit 1, und von den beiden letzten die positive mit 2, die negative mit 3, so sehen wir, dass die Schleife um 0 die Werte 2 und 3 vertauscht, während die Schleife um den reellen Verzweigungspunkt $a\sqrt[3]{4}$ die Werte 1 und 2 vertauscht. Es giebt noch zwei Verzweigungspunkte; beide haben den Modulus $a\sqrt[3]{4}$, während ihre Argumente beziehungsweise $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$ sind.

Digitized by Google

Um von z_0 zu dem ersten von diesen Punkten zu gelangen, beschreiben wir zuerst einen Kreisbogen $\frac{2}{3}\pi$ um 0, wodurch z_0 mit $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ multipliciert wird. Die Wurzel 1 wird dadurch mit $e^{\frac{4\pi i}{3}}$, 2 und 3 mit $e^{\frac{\pi i}{3}}$ multipliciert, oder mit anderen Worten, 1, 2 und 3 gehen beziehungsweise über in das Produkt aus den reellen Werten, die wir früher als 1, 3 und 2 bezeichnet haben, mit $e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Nun lässt sich der gegebenen Gleichung die Form

$$w^3 + z^3 = 3a.we^{\frac{4\pi i}{3}}.ze^{\frac{2\pi i}{3}}$$

geben, und daraus schliessen wir, dass die Wurzeln, wenn wir nun längs der geraden Linie weiter gehen bis zum Verzweigungspunkte, abgesehen von dem komplexen Faktor dieselben Werte daurchlaufen müssen, die sie durchlaufen, wenn z der Axe der reellen Zahlen bis zum reellen Verzweigungspunkte folgt, nur mit dem Unterschiede in den Bezeichnungen, dass 2 und 3 vertauscht sind. Da nun der reelle Verzweigungspunkt 1 und 2 vertauschte, so muss der komplexe 1 und 3 vertauschen. Auf ähnliche Weise sieht man, dass dasselbe für den vierten Verzweigungspunkt gilt. Als Probe kann der Umstand dienen, dass ein Weg um alle Verzweigungspunkte herum alle Wurzeln zu ihren ursprünglichen Werten zurückführt, da

$$(1\,2)\,(1\,3)\,(2\,3)\,(1\,3) = 1.$$

Die Verzweigungsschnitte werden von den 4 Punkten nach ∞ gelegt, oder, da dieser Punkt kein Verzweigungspunkt ist, nach einem anderen Punkte. Von diesem Punkte gehen also 4 Verzweigungsschnitte aus, in denen die Blätter so in einander übergehen, wie es durch die Faktoren des obenstehenden Produktes bestimmt wird. Der Punkt ist ein regulärer Punkt, aber trotzdem liegen die Blätter nicht getrennt. Geht man in einem Kreise um den Punkt herum, so kehrt man zu seinem Ausgangsblatt zurück, aber unterwegs ist man in den übrigen Blättern gewesen.

Beisp. 8. $4\,(w^3 - w + 1)^3 = 27\,w^2(1 - w^2)\,z.$

Digitized by Google

Die Verzweigungspunkte sind 0, 1 und ∞; in dem ersten hängen von den sechs Blättern drei und drei zusammen, in den übrigen zwei und zwei. Die Verzweigungsschnitte legen wir von 0 und 1 nach ∞. Dem ersten entspricht eine Substitution $S = (1\,2\,3)\,(4\,5\,6)$, dem zweiten eine Substition T, welche die Wurzeln paarweise vertauscht. Die Substitution $T\,S$ entspricht einer Schleife um ∞ und muss deshalb von zweiter Ordnung sein, so dass

$$T\,S\,T\,S = 1,$$

oder, da

$$T^2 = 1, \quad S^3 = 1,$$

$$T\,S\,T^{-1} = S^2.$$

Hieraus folgt nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Substitutionen, dass $T = (1\,4)\,(2\,6)\,(3\,5)$, worin drei und drei Wurzeln cyklisch verschoben werden können wie in S; die drei verschiedenen Formen für T entsprechen den verschiedenen Wegen, auf denen wir die Verzweigungsschnitte vom Punkte aus führen können. Die Gruppe der Gleichung wird aus den Substitutionen

$$1,\ S,\ S^2,\ T,\ T\,S,\ T\,S^2$$

gebildet, denn man erkennt leicht, dass alle übrigen Substitutionen, die sich aus S und T durch Multiplikation bilden lassen, sich mit Hülfe der obenstehenden Relationen auf eine von den 6 angegebenen reducieren lassen.

Die Fläche gehört zu den regulär verzweigten, da die Gleichung unverändert bleibt, wenn man für w einen der Werte

$$w,\ 1-w,\ \frac{w}{1-w},\ \frac{1}{w},\ \frac{1}{1-w},\ \frac{1-w}{w}$$

setzt, so dass sich alle Wurzeln durch eine von ihnen rational ausdrücken lassen. In Wirklichkeit bestimmt die Gleichung die sechs Werte für das Doppelverhältnis zwischen den Wurzeln einer biquadratischen Gleichung, für die eine gewisse rationale Funktion der Koefficienten (die absolute Invariante) den Wert z hat.

Digitized by Google

19. Eine Riemannsche Fläche mit einer grösseren Zahl von Blättern wird leicht unübersichtlich; deshalb kann es vorteilhaft sein, die Gleichung zu benutzen, um die z-Fläche konform auf die w-Fläche abzubilden, namentlich wenn die umgekehrte Funktion eindeutig ist, denn in diesem Falle erhält die w-Fläche nur ein Blatt. Man benutzt dabei die Verzweigungsschnitte als Konturen. *Klein* legt durch alle Verzweigungspunkte eine beliebige geschlossene Kurve mit überall endlicher Krümmung, und legt die Verzweigungsschnitte so, dass sie mit Teilen von dieser Kurve zusammenfallen; darauf wird längs der Kurve ein Schnitt geführt, der alle Blätter durchschneidet. Jedes Blatt wird dadurch in zwei Teile geteilt, die von den beiden Ufern des Schnittes begrenzt werden. Bei der Abbildung werden dann diese Randkurven als Kurven mit endlicher Krümmung abgebildet, ausgenommen in den Punkten, die den Verzweigungspunkten entsprechen.

In dem oben betrachteten Beispiel 8 durchschneiden wir die sechs Blätter längs der Axe der reellen Zahlen und teilen dadurch jedes Blatt in zwei Halbblätter. Nun kommt es darauf an, die Kurven zu bestimmen, die von w beschrieben werden, wenn z die Axe der reellen Zahlen durchläuft; man sieht leicht, dass z reell ist, sobald eine der folgenden Grössen reell ist:

$$w(1-w); \; w+\frac{1}{w}; \; 1-w+\frac{1}{1-w}.$$

Setzen wir $w = x + iy$, so finden wir, dass diese Grössen reell sind, wenn w auf eine von den Kurven

$$y(2x-1)=0; \; x^2+y^2=1;$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$

fällt; diese werden also Bilder von der Axe der reellen Zahlen; sie teilen die Ebene in 12 Theile, von denen jeder von 3 Kreisbogen (Geraden) begrenzt wird. Jedes Halbblatt wird als ein Dreieck abgebildet (vier davon erstrecken sich bis ins Unendliche); die drei Ab-


Digitized by Google

schnitte der Axe der reellen Zahlen werden als die Seiten des Dreiecks abgebildet; die Punkte 0, 1 und ∞ entsprechen den Eckpunkten des Dreiecks, und die Winkel an diesen sind, wie wir nach der Anzahl der in den verschiedenen Verzweigungspunkten zusammenhängenden Blätter erwarten mussten, beziehungsweise $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Schraffieren wir diejenigen Dreiecke, welche die Halbebenen abbilden, in denen die Koefficienten des imaginären Teiles positiv sind (die positive Halbebene), so wird jedes schraffierte Dreieck an drei weisse stossen und umgekehrt. Wählen wir einen Punkt z in einer von den positiven Halbebenen, so wird ihm ein Punkt w in einem der schraffierten Dreiecke entsprechen; geht nun z über die Axe der reellen Zahlen hinunter in die negative Halbebene, so wird w über die Begrenzung des Dreiecks in eins der Nachbardreiecke gehn; in welches, das wird davon abhängen, welchen von den drei Abschnitten der Axe der reellen Zahlen z passiert. Ist es derjenige zwischen 0 und 1, so wird, wenn die Verzweigungsschnitte von 1 nach $+\infty$ und von 0 nach $-\infty$ gelegt sind, z in seinem Blatt bleiben und w in ein anderes Dreieck hinübergehen, das zusammen mit dem ersten das Bild des ganzen Blattes liefert. Die eleganteste Form der Abbildung erhalten wir jedoch, wenn wir die w-Ebene stereographisch auf eine Kugel projicieren; geben wir dieser einen Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$, und lassen wir sie die Ebene im Punkte $\frac{1}{2}$ berühren, so werden nämlich, worauf wir hier nicht genauer eingehen wollen, alle Begrenzungslinien als grösste Kreise projiciert. Dadurch werden die Dreiecke als sphärische Dreiecke projiciert, die, da sie dieselben Winkel haben, abwechselnd kongruent und symmetrisch werden, also die Kugel in 12 gleich grosse Teile teilen. (Siehe F. Klein: Das Isokaeder).

Digitized by Google

KAPITEL III.

KOMPLEXE INTEGRATIONSWEGE.

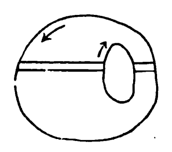
REELLE RANDINTEGRALE.

20. P und Q seien zwei reelle Funktionen der rechtwinkeligen Koordinaten x und y; von diesen nehmen wir an, dass sie, gleichgültig auf welche Weise, als überall *stetig* und *eindeutig* definiert sind in einem gewissen Flächenstück, das in einer Ebene oder auf einer Riemannschen Fläche liegt und von einer oder mehreren Randkurven begrenzt wird. Ferner setzen wir voraus, dass die Funktionen sich differentiieren lassen. Wir wollen dann nachweisen, dass das Doppelintegral

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

wo die Integration auf das ganze gegebene Flächenstück ausgedehnt werden soll, sich in ein einfaches Integral, genommen längs den Randkurven, verändern lässt.

Wir teilen das Flächenstück in unendlich viele, unendlich schmale Streifen mit Hülfe von Geraden, die der x-Axe parallel sind. Jeder Streifen wird dann von zwei Parallelen und von zwei Bogenelementen, die zu derselben oder zu verschiedenen Randkurven gehören, begrenzt. Ein Streifen kann ganz in einem Blatt liegen, er kann aber auch über einen Verzweigungsschnitt hinausgehen und dadurch in mehreren Blättern zu liegen kommen. Die begrenzenden Bogenelemente machen zusammen genau alle Randkurven aus. Kommen Verzweigungspunkte vor, so denken wir uns, dass immer eine von den Parallelen durch jeden solchen Punkt geht.



Wir betrachten nun den einen Teil des Integrales, nämlich

$$\int dy\int\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx,$$

Digitized by Google

und integrieren über einen Streifen, dessen begrenzende Geraden in den Abständen y und $y + dy$ von der x-Axe liegen; dadurch erhalten wir

$$\int \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q_\alpha - Q_\beta,$$

wo Q_α und Q_β bezeichnen, dass beziehungsweise α und β in Q statt x eingesetzt sind. α und β bedeuten Abscissen zu denjenigen Punkten der Randkurven, an denen der Streifen endigt und anfängt, wenn man diesem in der positiven Richtung der Abscissenaxe nachgeht. Wir erhalten nun

$$\int dy\,(Q_\alpha - Q_\beta) = \int Q\,dy,$$

wo das erste Integral über alle Streifen ausgedehnt ist, und das letzte in positiver Richtung längs allen Randkurven genommen ist. Die Identität der beiden Integrale folgt daraus, dass man, wenn man den Randkurven in positiver Richtung folgt, positive dy hat, wo die Streifen endigen, und negative, wo sie anfangen.

Der zweite Teil des Doppelintegrals wird auf ähnliche Weise behandelt, indem man die Streifen parallel zur y-Axe legt; dadurch wird dieser Teil des Integrals umgeformt in $\int P dx$, das Integral in positiver Richtung längs allen Randkurven genommen.

Wir haben die Werte der beiden bestimmten Integrale dadurch bestimmt, dass wir die Grenzen in das unbestimmte Integral eingesetzt haben. Das erfordert jedoch eine genauere Untersuchung für solche Streifen, die einen Punkt enthalten, in dem die Funktion unter dem Integralzeichen unstetig ist; ist dies z. B. der Fall bei einem der zuerst betrachteten Streifen mit einem Punkte, dessen Abscisse μ, so muss man

$$\int_\beta^{\mu-\gamma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \int_{\mu+\delta}^{\alpha} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

Digitized by Google

nehmen und die positiven Grössen γ und δ nach Null zu abnehmen lassen; dadurch erhält man

$$Q_{\mu-\gamma} - Q_{\beta} + Q_{\alpha} - Q_{\mu+\delta};$$

da Q stetig ist, so ist hier jedoch

$$\lim\ (Q_{\mu-\gamma} - Q_{\mu+\delta}) = 0.$$

Wir erhalten deshalb, selbst wenn die Abgeleiteten von P und Q in einzelnen Punkten unstetig sind,

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int (P dx + Q dy),$$

das letzte Integral in positiver Richtung längs allen Randkurven genommen. Diese Randkurven sind immer vollständig geschlossene Kurven.

Wir haben vorausgesetzt, dass P und Q reelle Funktionen sind, aber davon ist im Beweise kein Gebrauch gemacht, und in Wirklichkeit ist es nicht notwendig; dagegen ist es einleuchtend, dass x und y nur reelle Werte annehmen können.

Ist $P dx + Q dy$ ein exaktes Differential, so hat man identisch $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, so dass alle Elemente der Doppelintegrale Null sind. Man hat also folgenden Satz:

Das Integral eines exakten Differentials, $P dx + Q dy$, in positiver Richtung längs der vollständigen Begrenzung eines Flächenstücks genommen, ist Null, wenn P und Q für alle Punkte des Flächenstücks eindeutige und stetige Funktionen von x und y sind.

Die meisten Autoren stellen als Bedingung für die Gültigkeit des Satzes auch die Forderung, dass die Abgeleiteten stetig sein sollen, ja einige fordern noch mehr. Wir wollen daher einen zweiten Beweis geben, der die Bedingungen klar hervortreten lässt. Wir denken uns also die Forderungen so streng wie möglich gestellt und nehmen an, dass es einzelne Punkte, ja sogar endliche Kurvenstücke giebt, für welche die Forderungen nicht erfüllt sind. Wir schneiden die Punkte durch

Digitized by Google

unendlich kleine Kreise, die Kurvenstücke durch unendlich schmale geschlossene Kurven aus. Jetzt gilt der Satz, wenn wir die hinzugefügten Kurven als Teile der Begrenzung mitnehmen. Er gillt dann auch in der oben gegebenen Form, wenn nur die hinzugefügten Integrale verschwinden. Dieses ist aber eine notwendige Folge der Stetigkeit von P und Q, denn für die kleinen Kreise ist der Integrationsweg unendlich klein und für die schmalen Kurven heben sich die Integralelemente paarweise auf. Selbst eine Unstetigkeit von P und Q in den ausgeschnittenen Punkten und Kurvenstücken ist ohne Bedeutung wenn P und Q nur endlich bleiben.

KOMPLEXE INTEGRATIONSWEGE.

21. Es sei $f(z)$ eine Funktion der komplexen Variablen z, und diese Funktion sei eindeutig in einer Riemannschen Fläche. Dann wollen wir zunächst erklären, was wir unter dem Integral

$$\int f(z)\, dz,$$

genommen längs einer in der Fläche liegenden Kurve, verstehen.

Wenn wir von einem Punkte der Kurve zu dem konsekutiven gehen, so erfährt z eine Zunahme dz, deren Modulus die Länge des Bogenelementes ist, während das Argument durch den Winkel des Elements mit der Axe der reellen Zahlen dargestellt wird; wird diese Zunahme mit dem Werte der Funktion in diesem Punkte multipliciert, so haben wir das Element des Integrals, und die Summe aller Elemente für die ganze gegebene Kurve ist der Wert des Integrals.

Die Grenzen des Integrals werden von dem Anfangs- und Endpunkte der Kurve gebildet; zwischen diesen beiden Punkten lassen sich jedoch unendlich viele Kurven legen, und man kann deshalb nicht erwarten, dass der Wert des Integrals nur von den Grenzen abhängig wird. Wir wenden uns darum zu einer genaueren Untersuchung dieser Verhältnisse, die ursprünglich von *Cauchy* herrührt, der dadurch den Grund zu der Entwickelung der neueren Funktionstheorie gelegt hat.

Digitized by Google

Wir erhalten, wenn wir rechtwinkelige Koordinaten einführen,

$$\int f(z)\,dz = \int (u + iv)(dx + idy) = \int [(u + iv)\,dx + (ui - v)]\,dy.$$

Da nach 5

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

so wird der Ausdruck unter dem letzten Integralzeichen ein exaktes Differential; sind u und v eindeutig und stetig in einem gewissen Flächenstück, so gilt dasselbe von $f(z)$ und umgekehrt; hieraus folgt also:

Ist $f(z)$ eindeutig und stetig in einem gewissen Flächenstück, so ist

$$\int f(z)\,dz = 0, \tag{1}$$

wenn das Integral in positiver Richtung längs der vollständigen Begrenzung des Flächenstücks genommen wird.

Es sei (C) der Wert des Integrals, genommen in einer bestimmten Richtung längs einer gewissen vollständig geschlossenen Kurve C, die allein oder zusammen mit einigen von den Randkurven A, B ... ein gewisses Flächenstück vollständig begrenzt; C_1 sei eine andere Kurve, die zusammen mit C ein Flächenstück vollständig begrenzt, in dem die Funktion eindeutig und stetig ist. Die Kurve C lasst sich dann dadurch in C_1 umformen, dass man sie sich stetig verändern lässt, so dass das dazwischen liegende Areal M beständig abnimmt, bis es zuletzt Null wird, wenn C mit C_1 zusammenfällt. Bei dieser Veränderung bildet beständig C zusammen mit A, B ... die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks; wird bei der Veränderung der Kurve ihre bestimmte Richtung beibehalten, und ist (C_1) der Wert des Integrals auf C_1 mit dieser Richtung, so erhalten wir durch Betrachtung des von C und C_1 begrenzten Areals M

$$(C) - (C_1) = 0, \text{ oder } (C) = (C_1),$$

da die Richtung der Integration auf einer der Kurven C und C_1 wechseln muss, wenn die Kurve als eine der Rand-

Digitized by Google

kurven von M betrachtet werden soll und in ihrer positiven Richtung durchlaufen wird. Folglich:

Das Integral, längs einer geschlossenen Kurve genommen, verändert seinen Wert nicht, wenn die Kurve sich erweitert oder zusammenzieht, wenn sie nur nicht bei ihrer Veränderung einen Punkt passiert, in dem die Funktion aufhört eindeutig und stetig zu sein.

22. Nun wollen wir das Integral längs zwei verschiedenen Wege, ACB und ADB nehmen. Die gemeinsamen Anfangs- und Endpunkte müssen hier nicht nur denselben Werten von z entsprechen, sondern auch in beiden Fällen in denselben Blättern liegen, so dass man, welchen von den beiden Wegen man auch einschlagen mag, mit denselben Funktionswerten anfängt und endigt. Die beiden Wege zusammengenommen, der eine in entgegengesetzter Richtung, bilden eine vollständig geschlossene Kurve. Ist diese K, so hat man also

$$(ACB) - (ADB) = (ACB) + (BDA) = (K).$$

Dadurch ist folgender Satz bewiesen:

Wird das Integral längs zwei verschiedenen Wegen zwischen denselben Punkten genommen, so erhält es Werte, deren Unterschied den Wert des Integrals, genommen längs einer vollständig geschlossenen Kurve, darstellt.

RESIDUEN.

23. Wir befreien die Fläche von den singulären Punkten, indem wir diese zu Mittelpunkten von kleinen Kreisflächen machen, die wir dann ausschneiden. Ist der Punkt ein Pol, der nicht zugleich Verzweigungspunkt ist, so wird die Kreisfläche nur aus dem Blatt herausgeschnitten, in dem der Pol liegt; ist der Punkt ein Verzweigungspunkt, so wird der ausgeschnittene Teil eine kleine Schraubenfläche. Die Fläche ist nunmehr eine solche, in der die Funktion überall eindeutig und stetig ist, aber zu den ursprünglichen Randkurven sind diejenigen neu hinzugefügt, die durch die Ausschnitte entstanden sind.

Digitized by Google

Man braucht nicht alle singulären Punkte herauszuschneiden; wenn eine Kurve bei stetiger Änderung einen solchen Punkt passiert, so kann man sich denken, dass dies dadurch geschieht, dass die Kurve dahingebracht wird eine kleine geschlossene Kurve um den Punkt zu berühren und dann in sich aufzunehmen. Dadurch wird zu dem Integral das längs der kleinen geschlossenen Kurve genommene Integral hinzugefügt, und man braucht den Punkt nicht auszuschneiden, wenn dies Integral den Wert Null hat. Das gilt z. B. von Verzweigungspunkten, die nicht zugleich Pole sind. Der Modulus des Integrals ist nämlich gleich oder kleiner als das Produkt aus der Länge der Kurve und dem grössten Modulus der Funktion auf der Kurve, und dieses Produkt nimmt nach Null zu ab, wenn die Länge der Kurve nach Null zu abnimmt. Der Punkt ∞ muss besonders untersucht werden, denn hier ist der Weg in der Ebene unendlich lang; das Integral braucht deshalb nicht Null zu werden, wenn auch die Funktion Null werden sollte; man führt wie gewöhnlich $z = \frac{1}{u}$ ein, und hat dann das Integral

$$- f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u^2}$$

längs einem unendlich kleinen Kreise um den Punkt 0 zu nehmen.

Es ist auch nicht notwendig alle Pole auszuschneiden. Ist a ein Pol, der nicht zugleich Verzweigungspunkt ist, so lässt sich, wie später gezeigt werden wird, die Funktion in der Umgegend des Punktes in zwei Teile teilen, von denen der eine holomorph in a und deshalb ohne Bedeutung für das Integral ist, während der andere sich als eine endliche Summe von Gliedern von der Form

$$A\,(z-a)^{-p}$$

darstellen lässt, worin A eine Konstante, und p eine ganze positive Zahl bedeutet. Nun ist, wenn man Modulus und Argument für $z-a$ einführt, und das Integral längs einem kleinen Kreise um a mit dem Radius r genommen wird,

Digitized by Google

$$\int (z-a)^{-p}\,dz = r^{1-p}\int (\cos\theta + i\sin\theta)^{-p}\,d\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{1-p}\,r^{1-p}\Big[(\cos\theta + i\sin\theta)^{1-p}\Big]_0^{2\pi}, \qquad (2)$$

worin die Zeichen an der Eckklammer die obere und untere Grenze für θ angeben; der gefundene Ausdruck hat immer den Wert Null, wenn $p \gtrless 1$.

Für $p = 1$ erhält man

$$\Big[l\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)\Big]_0^{2\pi} = \Big[l\cdot e^{\theta i}\Big]_0^{2\pi} = 2\pi i. \qquad (3)$$

Wir sehen also, dass von allen Gliedern nur dasjenige Bedeutung hat, dessen Nenner $z - a$ in der ersten Potenz enthält. Der Koefficient dieses Gliedes ist von *Cauchy* das *Residuum* mit Bezug auf den Punkt a genannt worden.

Ist a zugleich ein Verzweigungspunkt, in dem q Blätter zusammenhängen, so lässt sich die Funktion wie oben entwickeln, nur hat man $z - a$ durch $(z-a)^{\frac{1}{q}}$ zu ersetzen. Um diesen Fall mit zu bekommen, brauchen wir nur in den oben ausgeführten Rechnungen p einen Bruch mit dem Nenner q bedeuten zu lassen; θ muss dann aber von 0 bis $2q\pi$ gehen, da die vollständig geschlossene Kurve $q$mal um den Punkt a geht. Dadurch wird der letzte Faktor des Resultates in (2) wie früher Null, so dass auch in diesem Falle das einzige Glied, das Bedeutung erhält, dasjenige ist, welches $z - a$ zum Nenner hat. Mit Bezug auf dieses wird der Wert des Integrals $2q\pi i$. Wir haben also folgenden Satz:

Hat die Funktion in einem Punkte das Residuum A, so ist der Wert des in positiver Richtung in einer kleinen geschlossenen Kurve um den Punkt geführten Integrals $2q\pi i A$, wenn q angiebt, wie oft die Kurve um den Punkt herumläuft.

Liegt p zwischen 0 und 1, so wird im Resultat in (2) der Faktor r^{1-p} gleichzeitig mit r nach Null zu abnehmen. In diesem Falle wird das Integral also auch Null werden für eine anscheinend geschlossene Kurve um den Punkt, wenn die Kurve unendlich klein ist. Die Kurve lässt sich allerdings erweitern,

Digitized by Google

aber da sie nicht geschlossen ist, müssen ihre Endpunkte liegen bleiben.

PERIODICITÄTSMODULN.

24. Wir wollen annehmen, dass eine geschlossene Kurve A zusammen mit einigen von den beim Ausschneiden gebildeten kleinen Randkurven $B, C \dots$ ein Flächenstück vollständig begrenzt. Da die Funktion in diesem überall eindeutig und stetig ist, so hat man

$$(A) + (B) + (C) + \dots = 0.$$

Die letzten Integrale wechseln das Zeichen, wenn wir die positiven Richtungen der Kurven im Verhältnis zu den ausgeschnittenen Punkten bestimmen; mit dieser Bedeutung der Bezeichnungen hat man dann

$$(A) = (B) + (C) + \dots = 2\pi i(b + c + \dots),$$

wo $b, c, \dots$ die zu den Punkten gehörigen Residuen bedeuten, multipliciert mit ganzen, den Verzweigungspunkten entsprechenden Zahlen. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man beachtet, dass A sich zusammenziehen lässt zu kleinen geschlossenen Kurven um $B, C \dots$ und Doppellinien, die diese Kurven verbinden. Auf einer solchen Doppellinie ist das Integral zweimal mit entgegengezetzten Richtungen zu nehmen, während in jedem Punkte der Funktionswert auf dem Hin- und Herwege derselbe ist. Das gesamte Integral auf der Doppellinie ist also Null, und das Resultat wird wie oben gleich der Summe der Integrale um die ausgeschnittenen Punkte. Diese Integrale heissen *Periodicitätsmoduln.*

Es giebt indessen geschlossene Kurven, die nicht zusammen mit den Kurven $B, C \dots$ ein Flächenstück begrenzen. Wir werden später sehen, dass man dann ein gewisses System von geschlossenen Kurven hinzufügen kann, so dass man mit dessen Hülfe immer für jede gegebene geschlossene Kurve die vollständige Begrenzung eines Flächenstückes erreicht. Dadurch erhalten wir neue Periodicitätsmoduln, die durch die Integrale längs den hinzugefügten Kurven bestimmt werden. Für eine

Digitized by Google

beliebige geschlossene Kurve lässt sich nach dieser Hinzufügung das Integral als eine Summe von Periodicitätsmoduln ausdrücken, und in dieser Summe können die Moduln mit positiven oder negativen ganzen Zahlen multipliciert sein.

Wir haben gesehen, dass der Unterschied zwischen zwei Integralen, genommen zwischen denselben beiden Punkten aber auf verschiedenen Wegen, gleich dem Integral längs einer geschlossenen Kurve ist; da dieses sich durch eine Summe von Periodicitätsmoduln ausdrücken lässt, so erhalten wir allgemein

$$I = I_1 + n_1 A_1 + n_2 A_2 + \dots, \tag{4}$$

worin I_1 das Integral längs einem beliebigen Wege bedeutet, während I längs einem beliebigen anderen Wege zwischen denselben Grenzen genommen ist. $A_1, A_2 \dots$ sind Periodicitätsmoduln, während $n_1, n_2 \dots$ ganze, positive oder negative Zahlen sind.

Betrachten wir die untere Grenze des Integrals als konstant, während die obere ein variabler Punkt z ist, und erteilen wir z eine kleine Zunahme dz, so wird das Integral nach der Definition die Zunahme $f(z)dz$ erfahren. Daraus sehen wir, dass

$$\frac{dI}{dz} = f(z)$$

unabhängig von der Richtung der Zunahme ist. *Das Integral bestimmt deshalb eine monogene Funktion der variablen oberen Grenze.* Diese ist ∞-deutig, wenn nicht alle Periodicitätsmoduln Null sind.

Das Integral heisst ein *Abelsches,* wenn die Funktion unter dem Integralzeichen algebraisch ist.

In den folgenden Beispielen sind die Flächen so bequem zu übersehen, dass die geschlossenen Wege, welche die Periodicitätsmoduln bestimmen, leicht in die Augen fallen.

Beisp. 1. $$\int \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Die Verzweigungspunkte 0 und ∞ werden durch einen

Digitized by Google

Verzweigungsschnitt verbunden. Für den letzten Punkt wird das Integral in

$$-\int\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

umgeformt, wo die Funktion für $u = 0$ einen Pol hat, aber kein Residuum. Dasselbe gilt für $z = 0$, so dass keiner von den Punkten ausgeschnitten zu werden braucht. Von geschlossenen Kurven haben wir solche, die zweimal um einen der Punkte gehen und eine Schraubenfläche begrenzen, und solche, die in demselben Blatt verlaufen und beide Punkte oder keinen von ihnen umschliessen, zwei Fälle, die nicht von einander verschieden sind. Wir sehen hieraus, dass jede geschlossene Kurve allein ein Fläckenstück begrenzt; die Integralfunktion hat deshalb keine Periodicitätsmoduln, sondern ist eindeutig auf der Riemannschen Fläche. Das stimmt zu dem Umstande, dass das Integral algebraisch und eine rationale Funktion von $\sqrt{z}$ ist.

Beisp. 2. $$\int\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Die beiden Verzweigungspunkte $+1$ und -1 werden verbunden; sie sind Pole, brauchen aber nicht ausgeschnitten zu werden. $z = \infty$ muss nicht ausgeschnitten werden. Der Fall ist also wie der vorhergehende; man hat eine zweiblättrige Riemannsche Fläche ohne Randkurven mit zwei Verzweigungspunkten, die durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sind. Abelsche Integrale auf einer solchen Fläche haben keine Periodicitätsmoduln und sind algebraisch.

Beisp. 3. $$\int\frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Fläche ist dieselbe wie in Beispiel 2. Das Integral ist eine rationale Funktion von z und $\sqrt{1-z^2}$, nämlich $\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$.

Beisp. 4. $$w = l\cdot z = \int_1^z\frac{dz}{z};\quad z = e^w.$$

Digitized by Google

Der Punkt 0 ist, auf der einblättrigen Fläche, ein Pol mit dem Residuum 1; untersucht man den Punkt ∞ auf die gewöhnliche Weise, so findet man für ihn das Residuum -1. Die beiden Punkte bestimmen deshalb nur den einen Periodicitätsmodul $2\pi i$. Da ein geschlossener Weg um den einen oder um beide Punkte sich in einen Punkt zusammenziehen lässt, und da sonst keine geschlossenen Kurven vorkommen, so ist der gefundene Modul der einzige. Bezeichnen wir den Wert des Integrals, genommen längs der geraden Linie von 1 bis z, mit $\bar{l}\cdot z$, so haben wir

$$l\cdot z = \bar{l}\cdot z + 2p\pi i,$$

wo p eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Die Riemannsche Fläche der Funktion erhält unendlich viele Blätter, die in den Punkten 0 und ∞ zusammenhängen; diese Punkte werden durch einen Verzweigungsschnitt verbunden, den wir längs dem negativen Teil der Axe der reellen Zahlen führen wollen. Längs diesem lassen wir jedes Blatt in das oberhalb liegende hinübergehen, sobald wir bei einem positiven Umlauf um den Punkt 0 den Verzweigungsschnitt überschreiten. In einer Reihe gerade übereinander liegender Punkte wächst dann der Wert des Logarithmus um $2\pi i$ für jedes Blatt, um das wir hinaufsteigen.

Schneiden wir eins der Blätter von den beiden nächsten los, so erhalten wir in dem abgeschnittenen Blatte eine unendlich schmale Randkurve, die durch eine Doppellinie von 0 bis $-\infty$ gebildet wird. Führen wir das Integral bis an zwei Punkte, die unendlich nahe bei einander aber auf verschiedenen Seite nder Doppellinie liegen, das eine Mal auf einem Wege, der positiv um 0 herumführt, das andere Mal auf einem Wege, der negativ um 0 herumführt, so wird der Wert des Integrals im ersten Falle um $2\pi i$ grösser sein als im letzten.

Nun wollen wir das Blatt auf der w-Ebene abbilden; die beiden Teile der Doppellinie, oder, wie wir uns ausdrücken wollen, die beiden Ränder des Schnittes müssen zwei verschiedene Bilder geben, von denen das eine aus dem anderen durch eine Parallelverschiebung gebildet wird, die durch den Perio-

Digitized by Google

dicitätsmodul $2\pi i$ bestimmt ist. Ist n eine positive Grösse, so haben wir $l(-n) = ln + (2p + 1)\pi i$, wo wir unter ln den reellen Logarithmus verstehen, und wo p eine ganze Zahl bedeutet. Wir wollen annehmen, dass wir das Blatt gewählt haben, wo für den obersten Rand des Schnittes $p = 0$ ist; für den untersten haben wir dann $p = -1$; hieraus ergiebt sich, dass das Blatt als ein unendlich langer von zwei Geraden begrenzter Streifen von der Breite 2π abgebildet wird; die begrenzenden Geraden erstrecken sich nach beiden Seiten bis ins Unendliche und laufen der Axe der reellen Zahlen, beiderseits im Abstande π, parallel.

An diesen Streifen schliessen sich nun nach beiden Seiten hin damit kongruente Streifen, die die Bilder von den beiden Blättern sind, die zunächst über und unter demjenigen liegen, mit dem wir begonnen. Fahren wir in derselben Weise fort, so sehen wir, dass das Bild der Riemannschen Fläche mit den darauf ausgeführten Schnitten die w-Ebene in unendlich viele Streifen von der Breite 2π teilt. Dass die Streifen von geraden Linien begrenzt werden, ist unwesentlich und hat seinen Grund in der besonderen Form, die wir dem Verzweigungsschnitt gegeben haben; ziehen wir eine andere Linie zwischen 0 und ∞, so wird das Bild auch ein anderes werden, aber in allen Fällen werden sich die unendlich vielen Bilder aus einem von ihnen durch fortwährende Parallelverschiebung um $2\pi i$ bilden lassen.

Wir haben nun die Mittel erhalten, um die umgekehrte Funktion $z = e^w$ zu untersuchen. Einem beliebig gegebenen Punkte w entspricht nur ein Punkt z; die Funktion ist deshalb *eindeutig in der ganzen Ebene;* den Punkten $w + 2p\pi i$, wo p alle ganzen Zahlen durchläuft, entsprechen Punkte, die in der Riemannschen Fläche über einander liegen und deshalb derselben komplexen Zahl z entsprechen. z bleibt also unverändert, wenn w eine Zunahme $2\pi i$ erfährt, und heisst deshalb eine *periodische* Funktion von w mit der Periode $2\pi i$. z ist stetig im Gebiete jedes endlichen w, so dass ∞ der einzige singuläre Punkt ist; in diesem erhält die Funktion alle möglichen Werte, da ein unendlich ferner Streifen das Bild

Digitized by Google

eines ganzen Blattes ist. Der Punkt ∞ ist deshalb ein *wesentlich* singulärer Punkt.

Beisp. 5. $w = \operatorname{arc\,tg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$; $z = \operatorname{tg} w$.

$+i$ und $-i$ sind Pole, die beziehungsweise die Residuen $\frac{1}{2i}$ und $-\frac{1}{2i}$ haben; eine geschlossene Kurve um einen der Punkte bestimmt deshalb den Periodicitätsmodul π. Da der Punkt ∞ ein regulärer Punkt ist, so ist dieser Periodicitätsmodul der einzige. Dasselbe Resultat ergiebt sich durch Betrachtung der Gleichung

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} l \frac{1+zi}{1-zi},$$

die man erhält, wenn man den Bruch zerlegt und integriert.

Die Riemannsche Fläche erhält unendlich viele Blätter und hat Verzweigungspunkte in $+i$ und $-i$, die durch einen Verzweigungsschnitt verbunden werden. Ist dieser eine Gerade, so wird deren Bild in der w-Ebene wieder eine Gerade sein, die sich nach beiden Seiten bis ins Unendliche erstreckt und senkrecht auf der Axe der reellen Zahlen steht. Der Bruch unter dem Logarithmuszeichen ist nämlich positiv, wenn z ein Punkt zwischen $+i$ und $-i$ ist. Benutzen wir den reellen Wert des Logarithmus, so wird arc tg rein imaginär, so dass ein Rand des Verzweigungsschnittes auf der w-Ebene in der Axe der imaginären Zahlen abgebildet wird. Die übrigen Bilder des Schnittes werden dann diesem parallel und teilen die Ebene in Streifen von der Breite π.

Dem Punkt $z = \infty$ entspricht

$$w = \frac{1}{2i} l(-1) = \frac{1}{2i}(\pi i + 2p\pi i) = \frac{2p+1}{2}\pi.$$

Aus dem gefundene Resultate schliessen wir, dass $\operatorname{tg} w$ eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion ist, die Pole in den Punkten $\frac{2p+1}{2}\pi$ hat. Man sieht, dass der Punkt ∞ wie im vorhergehenden Beispiel ein wesentlich singulärer Punkt ist.

Digitized by Google

Beisp. 6. $w = \arc \sin z = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \quad z = \sin w.$

Die Funktion hat eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, die in $+1$ und -1 Verzweigungspunkte hat; diese sind zugleich Pole, aber da in der Nähe des Punktes 1

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{2}\ \overline{1-z},$$

während in der Nähe von -1

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+z},$$

so wird das Integral, genommen um einen von diesen Punkten längs einer unendlich kleinen Kurve, Null sein, selbst wenn die Kurve nur scheinbar geschlossen ist. Für den Punkt ∞ setzen wir $z = \frac{1}{u}$ und erhalten

$$-\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}},$$

woraus in der Nähe von $u = 0$

$$\pm \int \frac{i\,du}{u}$$

wird.

Wir haben deshalb bei $z = \infty$ zwei getrennte Punkte mit den Residuen $\pm i$. Eine geschlossene Kurve um einen der Verzweigungspunkte giebt keinen Periodicitätsmodul; legen wir den Verzweigungsschnitt von $+1$ nach -1, so verläuft eine geschlossene Kurve um beide Punkte in einem der Blätter, und lässt sich zu einer kleinen Kurve um einen von den Punkten ∞ zusammenziehen; man erhält deshalb nur einen Periodicitätsmodul, nämlich 2π. Die Kurve begrenzt nicht für sich allein ein Flächenstück, sondern in Verbinding mit einer Kurve um einen von den Punkten ∞. Ziehen wir sie um die beiden Verzweigungspunkte zusammen, so können wir nicht weiter gelangen als bis zu einer Kurve, die ein Mal in einem unendlich kleinen Kreise um den einen Verzweigungspunkt geht, dann

Digitized by Google

längs einer geraden Linie zu dem zweiten, um diesen herum und zurück längs der Geraden. Die Integrale um die beiden Punkte sind, wie oben erwähnt, Null; die beiden Integrale längs der geraden Linie werden gleich gross, da für denselben Punkt sowohl die Quadratwurzel als dz beide Male, wo das Punkt passiert wird, entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Periodicitätsmodul wird deshalb in Übereinstimmung mit dem oben auf einem anderen Wege gefundenen Resultat

$$2\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4\cdot\arcsin 1 = 2\pi.$$

Wollen wir die Riemannsche Fläche der Integralfunktion bilden, so spielt die zweiblättrige Fläche dieselbe Rolle wie die Ebene in den vorhergehenden Fällen. Die Fläche erhält also unendlich viele Blätter, von denen jedes wieder zweiblättrig ist. Die beiden Punkte ∞ sind Verzweigungspunkte, so dass jedes Blatt für sich mit allen analogen zusammenhängt. Der Verzweigungsschnitt wird zwischen den beiden Punkten ∞ gelegt und muss, um aus dem einen Blatt in das andere hinüberzu gelangen, den Verzweigungsschnitt der zweiblättrigen Fläche passieren. Wir wollen ihn der Ordinatenaxe folgen lassen, so dass z auf dem Wege rein imaginär ist. Setzen wir $z = iy$, wo y reel ist, so erhalten wir

$$w = i\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

so dass w, abgesehen von Vielfachen des Periodicitätsmoduls, rein imaginär ist. Die Bilder des Schnittes in der w-Ebene stellen deshalb ein System von Parallelen dar, von denen eine auf die Ordinatenaxe fällt, während der Abstand zwischen zwei auf einander folgenden 2π beträgt.

Jeder von den Streifen ist das Bild eines Doppelblattes. Um das Bild des einfachen Blattes zu erhalten, wollen wir die Lage von zwei Punkten w_1 und w_2 untersuchen, die den beiden Punkten z_1 und z_2 entsprechen, die jeder in seinem Blatt, gerade über einander, liegen. Wir suchen die Summe $w_1 + w_2$, und

Digitized by Google

müssen dann von 0 in einem der Blätter nach z_1 und z_2 gehen, wo der eine Weg notwendigerweise über den Verzweigungsschnitt führt. Das letzte Integral bleibt unverändert, wenn wir gleichzeitig das Vorzeichen der Quadratwurzel und die Richtung des Weges verändern. Dadurch wird $w_1 + w_2$ der Wert des Integrals, das von 0 um den einen Verzweigungspunkt und zurück nach 0 in dem anderen Blatt geführt ist. Dieser Weg lässt sich zusammenziehen in einen, der von 0 in einer geraden Linie nach 1 führt, um 1 in einem kleinen Kreise und zurück nach 0 mit entgegengesetztem Vorzeichen der Quadratwurzel. Dadurch erhalten wir

$$w_1 + w_2 = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi + 2p\pi.$$

Wir sehen hieraus, dass die Mitte zwischen w_1 und w_2 der eine oder der andere von den beiden Punkten $\frac{1}{2}(2p+1)\pi$ ist, die in dem betrachteten Streifen liegen. Zwei Punkte des Streifens, deren Abstand von einem der genannten Punkte halbiert wird, werden also immer zu verschiedenen Blättern gehören. Der Streifen wird in zwei, den beiden Blättern entsprechende Teile durch eine Linie geteilt, die Bild des Verzweigungsschnittes ist, und deren Form von der Form dieses Schnittes abhängt. Lassen wir beispielsweise den Verzweigungsschnitt die gerade Linie zwischen den beiden Punkten sein, so wird z für alle Punkte dieser Geraden reell sein, und deshalb ist auch w reell. Die Linie, die den Streifen teilt, wird dann das Stück, das der Streifen von der Axe der reellen Zahlen abschneidet. Hierbei hat man zu beachten, dass der Verzweigungsschnitt doppelt ist, da man nur dadurch das ganze Linienstück erhält. Die umgekehrte Funktion, $\sin w$, ist eindeutig und stetig in der ganzen Ebene und hat im Punkte ∞ einen wesentlich singulären Punkt.

Beisp. 7.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)};\ z = \sin \operatorname{am} w = \operatorname{sn} w.$$

Digitized by Google

Das Integral ist *das elliptische Integral erster Art* in der Legendreschen Normalform. *Jacobi* hat die umgekehrte Funktion *Sinus-Amplitude* genannt. Wir wollen k als reell annehmen; die Behandlung bleibt jedoch im wesentlichen dieselbe für komplexe k. Zugleich wollen wir $k < 1$ voraussetzen. Für $k = 1$ ist das Integral algebraisch; für $k = 0$ geht es über in arc sin z.

Wir beginnen bei der Integration mit dem positiven Werte der Quadratwurzel und denken uns diesen Wert in dem obersten Blatt. Die zweiblättrige Fläche hat Verzweigungspunkte und Pole in -1, $+1$, $-\frac{1}{k}$ und $+\frac{1}{k}$; diese Punkte brauchen nicht ausgeschnitten zu werden, ebensowenig wie die beiden Punkte ∞.

Die Verzweigungsschnitte legen wir von -1 über 0 nach $+1$ und von $-\frac{1}{k}$ über ∞ nach $+\frac{1}{k}$. Ein Weg um alle 4 oder um 3 von den Punkten lässt sich auch so betrachten, als ob er keinen oder einen Punkt umschliesst, er liefert also keinen Periodicitätsmodul. Wir haben deshalb nur geschlossene Wege zu betrachten, die zwei Punkte umschliessen.

Ein solcher, der im obersten Blatt liegt, möge die Punkte -1 und $+1$ umschliessen. Er bestimmt einen Periodicitätsmodul, der von *Jacobi* mit $4\,K$ bezeichnet wird; durch Zusammenziehen findet man

$$4\,K = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\triangle\,(z, k)}; \quad K = \int_0^1 \frac{dz}{\triangle\,(z, k)}.$$

K lässt sich nicht durch bekannte Funktionen ausdrücken, lässt sich aber in einer konvergenten Reihe nach Potenzen von k^2 entwickeln; entwickelt man $(1 - k^2 z^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach der Binominalformel, multipliciert mit $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz$ und integriert, so findet man

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right].$$

Man kann die vier Punkte auf sechs Arten zu je zweien kombinieren, aber da man von einer Kurve, die zwei von ihnen

Digitized by Google

umschliesst, auch sagen kann, dass sie die beiden übrigen umschliesst, so hat man nur drei Fälle zu untersuchen; den einen haben wir bereits erledigt; als zweite Kurve wollen wir diejenige nehmen, welche die Punkte 1 und $\frac{1}{k}$ umschliesst, und diese auf die gewöhnliche Weise zusammenziehen. Dadurch erhalten wir eine Doppellinie auf der $\triangle$ rein imaginär ist. *Jacobi* bezeichnet den entsprechenden Periodicitätsmodul mit $2iK'$ wo K' reel ist, wir haben dann

$$2iK' = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\triangle}.$$

Setzen wir hier

$$1 - k^2 = k_1^2;\ k^2z^2 = 1 - k_1^2 z_1^2,$$

so finden wir für K' denselben Ausdruck wie für K, nur dass k mit k_1 vertauscht ist.

Die dritte Kurve führt zum Integral

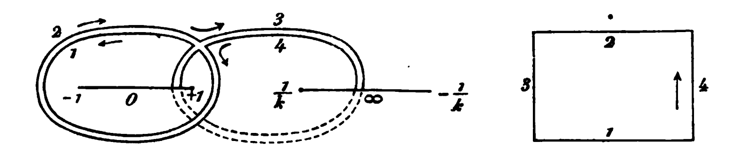
$$2\int_1^{-\frac{1}{k}} \frac{dz}{\triangle} = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\triangle} + 2\int_{\frac{1}{k}}^{-\frac{1}{k}} \frac{dz}{\triangle}.$$

Das letzte Glied liefert den Wert des Integrals, geführt längs einer geschlossenen Kurve, die ein Flächenstück begrenzt, in dem die Verzweigungspunkte $-\frac{1}{k}$ und $+\frac{1}{k}$, nicht aber -1 und $+1$, liegen; die Kurve begrenzt jedoch auch ein Flächenstück, in dem die beiden letzten, nicht aber die beiden ersten Punkte liegen; sie lässt sich also in eine Doppellinie von -1 nach $+1$ zusammenziehen. Die dritte Kurve liefert dadurch einen Periodicitätsmodul, der sich durch die beiden anderen linear und mit ganzen Koefficienten ausdrücken lässt. Die Funktion hat also nur zwei Periodicitätsmoduln.

Nun wollen wir ein Doppelblatt von der Riemannschen Fläche der Integralfunktion auf der w-Ebene abbilden. Das

Digitized by Google

Doppelblatt wird von den vier Rändern begrenzt, die den beiden Linien von -1 nach $+1$ und von 1 nach $\frac{1}{k}$ zukommen. Für die erste von diesen war einer von den Werten des Integrals reell; das Bild besteht deshalb aus zwei geraden Strecken, parallel zu der Axe der reellen Zahlen; auf diese Axe fällt eine der Strecken, wenn wir das Blatt zwischen denen gewählt haben, für welche der imaginäre Teil des Integralwertes zwischen 0 und $2K'i$ fällt. Der Abstand der Parallelen beträgt $2K'$, denn um von einem Punkte an dem einen Rande zu dem naheliegenden Punkte am anderen Rande zu gelangen, müssen wir die andere geschlossene Kurve durchlaufen, die den Periodicitätsmodul $2iK'$ lieferte. Auf dieselbe Weise sehen wir, dass die beiden Ränder der zweiten Linie als zwei Strecken abgebildet werden, die der Axe der imaginären Zahlen parallel



sind und den Abstand $4K$ haben; für ein passendes Blatt, das auch die früher gestellte Bedingung erfüllt, wird eine der Strecken auf die Ordinatenaxe fallen. Das Bild des Blattes wird also ein Rechteck mit den Seiten $4K$ und $2K'$. Die Figur, in der jedoch der Deutlichkeit wegen die Kurven vor dem Zusammenziehen gezeichnet sind, während das Bild dasjenige nach diesem Vorgange darstellt, zeigt wie die vier Ränder zusammen eine zusammenhängende Randkurve darstellen, die in positiver Richtung durchlaufen wird, während gleichzeitig w den Umfang des Rechtecks durchläuft.

Von einem beliebigen Punkte z des Dobbelblattes können wir nach einem beliebigen Punkte der Randkurve gehen; wir wollen beispielsweise nach einem Punkte von 4 gehen; der z entsprechende Punkt w wird gleichzeitig nach einem Punkte auf der Seite 4 gehen; gehen wir weiter über den Rand 4, so gelangt z in ein neues Blatt, und w geht über die Seite 4

Digitized by Google

in ein neues Rechteck, welches das Bild des neuen Blattes darstellt u. s. w.

Die ∞^2 Doppelblätter der Riemannschen Fläche entsprechen ∞^2 kongruenten Rechtecken, die die w-Ebene gerade einmal erfüllen. z ist deshalb eine eindeutige Funktion von w; sie heisst *doppelperiodisch*, da ihr Wert unverändert bleibt, wenn wir zu w eine beliebige Anzahl von Perioden addieren. Wir haben also

$$\operatorname{sn} w = \operatorname{sn}(w + 4mK + 2inK'),$$

wenn m und n beliebige positive oder negative Zahlen sind.

Es seien w_1 und w_2 die beiden Werte des Integrals, welche den beiden Punkten z_1 und z_2 entsprechen, die in einem Doppelblatt gerade über einander liegen; um von 0 aus zu ihnen zu gelangen, lassen wir den einen Weg im obersten Blatt verlaufen, während der andere den Verzweigungsschnitt überschreitet, der -1 mit $+1$ verbindet. Wir sehen dann, wie bei arcsin, dass $w_1 + w_2$ den Wert des Integrals darstellt, das von 0 bis 1 geführt ist, in einem kleinen Kreise um 1, und dann wieder zurück. Dieser Wert ist genau gleich dem halben ersten Periodicitätsmodul, so dass, abgesehen von Periodicitätsmoduln,

$$w_1 + w_2 = 2K.$$

Alle Mitten zwischen zwei Punkten w_1 und w_2 werden deshalb bestimmt durch

$$K + 2mK + nK'i.$$

Von diesen Punkten giebt es zwei in jedem Rechteck; zwei im Rechteck belegene Punkte w_1 und w_2 haben deshalb einen von diesen Punkten zur Mitte. Teilen wir das Rechteck mittels einer Geraden durch den erstgenannten Punkten in zwei Teile, so lassen diese beiden Teile sich als Bilder der einzelnen Blätter auffassen, die Gerade als das Bild eines sie trennenden Verzweigungsschnittes.

Legen wir eine Kurve im obersten Blatt um alle vier Verzweigungspunkte, so wird das Integral, längs dieser genommen,

Digitized by Google

gleich Null. Lassen wir die Kurve sich zur Axe zusammenziehen, so heben die Teile des

$$-1 \quad 0 \quad +1 \quad \frac{1}{k} \quad \infty \quad -\frac{1}{k}$$

Integrals von 1 bis $\frac{1}{k}$ und zurück sich auf. Auf den übrigen Stücken hat die Quadratwurzel entgegengesetzte Vorzeichen auf den Wegen hin und zurück, so dass wir haben

$$\int_{-1}^{1} \frac{dz}{\Delta} + \int_{\frac{1}{k}}^{-\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta} = 0,$$

oder

$$\int_{0}^{1} \frac{dz}{\Delta} = -\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta} = K.$$

Hieraus ergiebt sich, dass, abgesehen von Periodicitätsmoduln,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{\Delta} = \mathrm{sn}\,(\infty_1) = iK',$$

mithin

$$\mathrm{sn}\;(\infty_2) = 2K - iK'.$$

Wir ersehen hieraus, das z in zwei Punkten jedes Parallelogramms unendlich wird; da z in diesen Punkten keine anderen Werte als ∞ hat, so sind sie Pole.

Beisp. 8. $$w = \int_{0}^{z} \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}}\, dz.$$

Das Integral ist das sogenannte *elliptische Integral zweiter Art.* Die Funktion unter dem Integralzeichen hat dieselbe Riemannsche Fläche wie diejenige, die wir im vorhergehenden Fall betrachteten. Da kein Punkt ausgeschnitten zu werden braucht, so werden die Periodicitätsmoduln durch dieselbe Kurven bestimmt, die wir oben benutzten. Während das erste elliptische

Digitized by Google

Integral nur dadurch unendlich werden kann, dass man unendlich viele Periodicitätsmoduln hinzufügt, wird dieses unendlich, wenn z bis ins Unendliche wächst.

Später gelangen wir zu einer genaueren Untersuchung der elliptischen Integrale und Funktionen.

KAPITEL IV.

ZUSAMMENHANG UND NORMALFORM DER FLÄCHEN.

ZUSAMMENHANG DER FLÄCHEN.

25. Wir haben gesehen, das ein Integral eine eindeutige Funktion der variablen oberen Grenze ist, wenn deren Bewegung auf einen Teil einer Fläche beschränkt bleibt, in der jede geschlossene Kurve für sich allein ein Flächenstück begrenzt. Bei anderen Flächenstücken müssen wir die wesentlich verschiedenen geschlossenen Kurven suchen, die nicht jede für sich allein ein Flächenstück begrenzen, da diese die Periodicitätsmoduln der Integralfunktion bestimmen. Bei den einfachen Beispielen, die wir betrachtet haben, war es leicht diese Kurven zu finden, aber bei mehr zusammengesetzten Flächen können die Verhältnisse sehr unübersichtlich werden; wir wollen deshalb eine allgemeine Theorie für die Bestimmung der Periodicitätsmoduln entwickeln und dabei zugleich andere naheliegende Verhältnisse in Betracht ziehen. Da die Anzahl und Lage der geschlossenen Kurven von der Form der Fläche abhängen, so müssen wir die verschiedenen Flächenformen charakterisieren. und hier wollen wir unsere Untersuchungen auch auf andere Flächen als die Riemannschen ausdehnen, obgleich diese namentlich Bedeutung für uns haben. Bei diesen Untersuchungen betrachten wir solchen Flächen als gleichwertig, die sich durch Zusammenziehen, Erweitern, Biegen und Strecken in einander überführen lassen, wobei jedoch kein Zerreissen oder Zusammenfügen stattfinden darf. Eine Randkurve muss


Digitized by Google

deshalb bei der Änderung dauernd Randkurve bleiben, das heisst, sie muss dauernd eine geschlossene Kurve bleiben, die nicht dahin gelangt sich selbst oder andere Randkurven zu berühren oder zu schneiden. Denken wir uns die Fläche als ein Netz von unendlich kleinen Maschen, so können wir uns vorstellen, die Änderung geschehe dadurch, dass die einzelnen Maschen, indem sie dauernd unendlich klein bleiben, sich zusammenziehen und erweitern, und wir sehen daraus, dass die Fläche, während sie sich ändert, fortfährt sich selbst Punkt für Punkt zu entsprechen. Eine oder mehrere geschlossene Kurven, die ein Flächenstück begrenzen, müssen deshalb diese Eigenschaft behalten, und da wir bei den folgenden Untersuchungen die Bestimmung solcher Kurven vor Augen haben, so ist es gleichgültig, ob wir die gegebene oder die veränderte Fläche betrachten.

Wir wollen eine Fläche längs einer Linie AB durchschneiden. Eine geschlossene Kurve, die AB schneidet, wird dadurch geöffnet werden; nun lassen wir die Fläche sich ändern, und schliesslich vereinigen wir die beiden Ränder von AB wieder so, dass Punkt für Punkt von ihnen zusammenfallen, so wie es vor der Trennung der Fall war. Die geöffneten Kurven werden sich dabei wieder schliessen, und die Fläche wird die Eigenschaften behalten haben, die für uns von Bedeutung sind. Wir sehen hieraus, dass ein Zerreissen erlaubt sein kann, wenn es später durch das entsprechende Zusammenfügen wieder aufgehoben wird.

Hieraus folgt, dass *eine Schraubenfläche, die um einen Verzweigungspunkt ausgeschnitten wird, gleichwertig mit einer gewöhnlichen Kreisfläche ist;* wir können sie nämlich längs einem Radius aufschneiden und nach einer passenden Umformung die beiden Radien wieder zusammenwachsen lassen. Man sieht auch leicht, dass die beiden Flächen dahin gebracht werden können einander Punkt für Punkt zu entsprechen. Teilen wir die Schraubenfläche in unendlich viele Sektoren, und machen wir in jedem von diesen den Winkel p mal so klein, wenn p Blätter vorhanden sind, so geht die Schraubenfläche über in eine Kreisfläche.

Digitized by Google

Neumann nennt die gewöhnliche Kreisfläche eine *Elementarfläche.* Ein Rechteck, eine Kugelkalotte, eine Schraubenfläche u. s. w. sind also alle Elementarflächen. Jede Elementarfläche hat eine Randkurve, und jede in ihr liegende geschlossene Kurve begrenzt für sich allein ein Flächenstück.

Ein Wulst (ringförmige Fläche) ist eine Fläche ohne Randkurve; schneiden wir ein kleines Stück heraus (*punktieren* wir sie), so erhält sie eine Randkurve, aber dadurch ist sie nicht zu einer Elementarfläche geworden; man sieht nämlich leicht, dass man in sie eine geschlossene Kurve hineinlegen kann, die nicht für sich allein ein Flächenstück begrenzt. Dasselbe gilt von einem Kreisringe und von einer Cylinderfläche, die an den Enden durch Randkurven begrenzt wird; dies sind keine Elementarflächen, aber unter einander gleichwertig. Schneidet man sie auf längs einer Linie, welche die beiden Randkurven verbindet, so gehen sie über in Elementarflächen.

26. Wir wollen nun die Flächen, die wir zu untersuchen beabsichtigen, genauer charakterisieren:

Sie sollen endlich und, jedenfalls nach einer Punktierung, von einer oder mehreren Randkurven begrenzt sein. *Jedes durch eine kleine geschlossene Kurve ausgeschnittene Stück soll eine Elementarfläche sein mit einer bestimmten positiven Richtung der Randkurve.*

Wir haben hierdurch Flächen ausgeschlossen, die sich spalten, und Flächen mit nur einer Seite; bei den letzteren, die zuerst von *Möbius* bemerkt worden sind, kann man von einem Punkte auf der oberen Seite der Fläche zu dem gerade darunter liegenden Punkte gelangen ohne um den Rand der Fläche umzubiegen. Mann nehme einen Papierstreifen, der die Form eines schmalen Rechtecks hat, und färbe die eine Seite schwarz. Vereinigt man die beiden Enden so, dass Schwarz an Schwarz und Weiss an Weiss stösst, so erhält man eine zweiseitige Fläche mit zwei Randkurven; dreht man aber das eine Ende des Streifens vor der Vereinigung so um, das Schwarz an Weiss und Weiss an Schwarz stösst, so erhält man eine einseitige Fläche mit einer Randkurve. Nach dem Zusammenfügen gelangt man nämlich durch stetige Bewegung von Schwarz

Digitized by Google

nach Weiss, und man kann deshalb keinen Unterschied zwischen zwei Seiten machen. Schneiden wir ein kleines Stück durch eine geschlossene Kurve heraus, so erhält diese keine bestimmte positive Richtung, da das begrenzte Flächenstück auf beiden Seiten liegt. Wir betrachten also nur zweiseitige Flächen, und wollen uns denken, dass die Seite, auf der wir operieren, weiss ist, die andere schwarz. Bei der Zusammenfügung von Rändern müssen wir natürlich dafür sorgen, das die gleichfarbigen Seiten zusammen kommen, da wir sonst die Fläche einseitig machen.

27. In die Fläche können wir Schnitte hineinlegen; diese denken wir uns mit einer kleinen Breite, wie schmale Ströme, wo der Strom nicht zur Fläche gehört, seine Ufer aber neue Randteile werden.

Ein *Ringschnitt* wird gebildet, wenn man die Fläche längs einer geschlossenen Kurve durchschneidet, die weder sich selbst noch eine Randkurve schneidet oder berührt. Ein Ringschnitt vermehrt die Anzahl der Ränder um zwei und *kann* eine zusammenhängende Fläche in nicht zusammenhängende Stücke teilen. Das letztere wird z. B. immer stattfinden, wenn er in eine Elementarfläche hineingelegt ist.

Ein *Querschnitt* führt von einem Punkt einer Randkurve zu einem Punkt von derselben Randkurve oder von einer anderen Randkurve oder von sich selbst. Im letzten Falle heisst er auch ein *Sigmaschnitt* und lässt sich dann so betrachten, als ob er aus einem Ringschnitt und einem Querschnitt zwischen zwei Randkurven zusammengesetzt sei. Ein Querschnitt darf keine anderen Punkte als die genannten mit den Randkurven gemeinsam haben, und darf auch nicht sich selbst berühren oder schneiden.

Ein Querschnitt vermehrt die Anzahl der Randkurven um eine, wenn er zwei Punkte derselben Randkurve mit einander verbindet; seine beiden Ufer werden Teile von verschiedenen Randkurven[1]), und dadurch kann die Fläche in nicht zusammen-

[1]) Man muss nämlich, wenn man dem abgeschnittenen Kurvenstücke in positiver Richtung folgt, bei demselben Ufer des Querschnittes


Digitized by Google

hängende Teile geteilt werden. Ein Querschnitt vermindert die Anzahl der Randkurven um eine, wenn er *zwei* verschiedene Randkurven so verbindet, dass diese in Verbindung mit den beiden Ufern des Querschnittes eine Randkurve bilden; in diesem Falle kann er die Fläche nicht in nicht zusammenhängende Teile teilen; denn wenn man der neugebildeten Randkurve folgt, so gelangt man von der einen Seite des Querschnittes zu der anderen. Da ein Sigmaschnitt aus einem Ringschnitt und einem Querschnitt der letzterwähnten Art zusammengesetzt ist, so vermehrt er die Zahl der Randkurven um eine. Hat eine Fläche p Randkurven, so können wir dadurch, dass wir zwei von diesen durch einen Querschnitt verbinden, die Anzahl der Randkurven um eine vermindern, ohne den Zusammenhang der Fläche aufzuheben. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir zuletzt eine zusammenhängende Fläche mit nur einer Randkurve. Also:

Eine zusammenhängende Fläche mit p Randkurven lässt sich durch $p-1$ Querschnitte in eine zusammenhängende Fläche mit nur einer Randkurve umändern.

Neumann hat nun ferner die Forderung gestellt, dass jede solche Fläche sich durch Querschnitte in eine Elementarfläche umändern lasse; später werde ich zeigen, dass diese Forderung überflüssig ist.

Es kann zweckmässig sein auch andere Umänderungen der Fläche als die obengenannten zu betrachten; solche erhalten wir durch Einführung von Brücken und Röhren.

Eine *Brücke* ist ein neu hinzugefügtes Flächenstück, das eine geringe Breite besitzt und zwei Randpunkte mit einander verbindet. Durchschneiden wir die Brücke durch einen Querschnitt, so erhalten wir durch Zusammenziehen die ursprüngliche Fläche.

Ein *Rohr* ist ein neu hinzugefügtes röhrenförmiges Flächen-

---

beginnen und endigen. Das gilt nicht für eine einseitige Fläche, da deren Randkurve keine bestimmte positive Richtung hat. Die oben erwähnte einseitige Fläche lässt sich durch einen Querschnitt in ein Rechteck (eigentlich ein Doppelrechteck) überführen, und dieses hat nur eine Randkurve.

Digitized by Google

stück, das an den Enden von zwei von den Randkurven der Fläche begrenzt wird. Durchschneiden wir das Rohr durch einen Ringschnitt, so erhalten wir durch Zusammenziehen die ursprüngliche Fläche.

Sowohl Brücke wie Rohr müssen so gelegt werden, dass man dadurch nicht die beiden Seiten der Fläche mit einander in Verbindung bringt.

ZUSAMMENHANGSZAHL DER FLÄCHEN.

28. Angenommen, wir hätten eine Anzahl Elementarflächen und machten einen beliebigen Querschnitt; dieser muss in eine der Flächen fallen und sie in zwei Elementarflächen teilen; fahren wir auf dieselbe Weise fort, so muss die Anzahl der Elementarflächen für jeden ausgeführten Querschnitt um eine vermehrt werden.

Angenommen ferner, wir hätten eine Anzahl von Flächen, gleichgültig welche; da ein hinreichend kleines Flächenstück nach unseren Voraussetzungen immer elementar ist, so lassen die gegebenen Flächen sich immer mit Hülfe von hinlänglich vielen Querschnitten in lauter Elementarflächen teilen, und dies natürlich auf unendlich viele Arten. Wir wollen annehmen, dass wir t Querschnitte benutzen, und dadurch das ganze System in f Elementarflächen teilen, und dass wir ein anderes Mal t_1 Querschnitte benutzen und dadurch f_1 Elementarflächen erhalten. Wir benutzen darauf beide Systeme von Querschnitten, indem wir nach Ausführung des ersten Systemes das zweite oben auf dieses legen. Wir wollen voraussetzen, dass überall wo die beiden Systeme einen Punkt gemeinsam haben, dies ein einfacher Schnittpunkt sei, denn da, wo diese Voraussetzung nicht zutreffen sollte, können wir sie immer durch kleine Änderungen der Querschnitte zutreffend machen.

Die Anzahl der Querschnitte im zweiten Systeme war t_1, muss aber jetzt grösser gerechnet werden; überall, wo ein Schnittpunkt zwischen den beiden Systemen vorhanden ist, wird dieser nämlich den zum zweiten Systeme gehörenden Querschnitt in zwei solche teilen, denn ein Querschnitt darf

Digitized by Google

nicht über eine Randkurve hinaus fortgesetzt werden. Sind s Schnittpunkte da, so wird das zweite System deshalb nun nicht t_1, sondern $t_1 + s$ Querschnitte enthalten; diese teilen, wie oben gezeigt wurde, die f Elementarflächen in $f + t_1 + s$ solche Flächen. Diese Zahl bleibt unverändert, wenn wir das zweite System zuerst, das erste zuletzt legen, denn in beiden Fällen bleiben die Schnittpunkte und die Einteilung in Elementarflächen dieselben; man hat also

$$f + t_1 + s = f_1 + t + s$$

oder

$$t - f = t_1 - f_1.$$

Die Zahl $t - f$ bleibt also dieselbe, welches System von Querschnitten wir auch benutzen mögen um lauter Elementarflächen hervorzubringen; dasselbe gilt dann von der Zahl $t - f + 2$. Dies ist eine Zahl, die für das gegebene Flächensystem charakteristisch ist, und die bei dessen stetigen Änderungen nicht verändert werden kann, da diese nicht diejenigen Eigenschaften des Flächensystemes verändern, die wir beim Beweis benutzt haben. Wir nennen sie die *invariante Zahl* des Flächensystemes und sagen von einer zusammenhängenden Fläche, die die Zahl q hat, dass sie q Male zusammenhängend sei.

Für eine Elementarfläche ist $t = 0$, $f = 1$; sie ist also ein Mal oder einfach zusammenhängend.

In einem Flächensystem F legen wir einen beliebigen Querschnitt und erhalten dadurch ein neues System F_1; dieses möge sich durch t Querschnitte in f Elementarflächen teilen lassen; seine Zahl ist deshalb $t - f + 2$. F ist durch $t + 1$ Querschnitte in dieselben f Elementarflächen geteilt worden und hat deshalb die Zahl $t + 1 - f + 2$. Also:

Jeder Querschnitt, der in einem Flächensystem angebracht wird, macht dessen invariante Zahl um eine Einheit kleiner.

Hieraus ergiebt sich, dass bei einer p Male zusammenhängenden Fläche durch $p - 1$ Querschnitte die invariante Zahl auf 1 reduciert wird. Wir werden später, wie schon gesagt, beweisen, dass die Querschnitte sich immer auf solche Weise legen lassen, dass die Fläche dauernd zusammenhängend bleibt.

Digitized by Google

Ein Ringschnitt verändert nicht die invariante Zahl des Systemes.

Ein Ringschnitt lässt sich nämlich durch einen Querschnitt in einen Sigmaschnitt umändern; da dieses ein Querschnitt ist, so vermindert er die Zahl um eins; dasselbe thut der hinzugefügte Querschnitt; der Ringschnitt kann deshalb die Zahl nicht verändern.

Aus den beiden Sätzen folgt, dass eine Brücke die Zahl um eins vermehrt, während ein hinzugefügtes Rohr sie nicht verändert.

Wir haben gesehen, dass eine zusammenhängende Fläche mit p Randkurven sich durch $p - 1$ Querschnitte in eine zusammenhängende Fläche mit einer Randkurve verändern lässt; soll diese sich in eine Elementarfläche umändern lassen, so muss eine gerade Anzahl von Querschnitten benutzt werden; der erste bringt nämlich zwei Randkurven hervor; diese werden durch den zweiten zu einer vereinigt und so fort, bis man die Elementarfläche mit einer Randkurve erhält.

Wenn man aus einem System von Flächen eine Elementarfläche fortnimmt, so wird f um eins vermindert, die Zahl des Systemes also um eins vermehrt. Da man eine Punktierung dadurch hervorbringen kann, dass man einen kleinen Ringschnitt ausführt und das innere Flächenstück fortnimmt, so *vermehrt eine Punktierung die Zahl um eins.* Die unpunktierte Kugel hat deshalb die Zahl Null.

Beisp. 1. Eine an den Enden durch zwei Randkurven begrenzte Cylinderfläche wird elementar, wenn man die beiden Randkurven durch einen Querschnitt verbindet; die Cylinderfläche ist deshalb zwei Male zusammenhängend.

Beisp. 2. Der punktierte Wulst lässt sich durch einen Querschnitt in eine Fläche umändern, die mit der in Beisp. 1 genannten gleichwertig ist; der punktierte Wulst ist also drei Male, der geschlossene zwei Male zusammenhängend.

Beisp. 3. Eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit einem Verzweigungsschnitt, deren oberes Blatt punktiert ist, ist elementar.

Man kann nämlich die durch die Punktierung gebildete

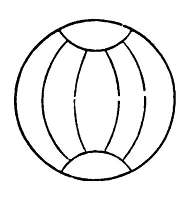
Digitized by Google

Randkurve erweitern, bis sie eine mit dem Verzweigungsschnitt zusammenfallende Doppellinie wird; nun hat man nur noch das untere Blatt, das von der Doppellinie als Randkurve begrenzt wird.

Beisp. 4. Man suche die Zusammenhangszahl für eine Riemannsche n-blättrige Fläche mit gegebenen Verzweigungspunkten, aber ohne Randkurven.[1])

Riemann sagt, dass ein Verzweigungsschnitt, in dem k Blätter zusammenhängen, von der *Ordnung* $k-1$ sei. Haben wir $k-1$ Verzweigungspunkte, in denen das Blatt 1 beziehungsweise mit den Blättern 2, 3 ... k zusammenhängt, und lassen wir diese Punkte zusammenfallen, so erhalten wir einen Punkt, in dem alle k Blätter zusammenhängen; wir können deshalb einen Verzweigungspunkt von der Ordnung $k-1$ so betrachten, als ob er aus $k-1$ einfachen Verzweigungspunkten zusammengesetzt sei. Wir wollen annehmen, dass unsere f Verzweigungspunkte von der Ordnung k_1-1, k_2-1 ... k_f-1 seien, und dass die Summe von diesen Zahlen m sei; m giebt also die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte an. Wir nehmen an, dass keine Verzweigungspunkte gerade über einander liegen, eine Annahme, die durch kleine stetige Änderungen leicht zu erfüllen ist.

Nun führen wir an zwei nahezu diametral entgegengesetzten Punkten der Kugel Punktierungen durch alle Blätter, also $2n$ Punktierungen; ist die gesuchte Zahl x, so wird sie jetzt $x+2n$. Zwischen den Punktierungen werden Schnitte geführt, die auch durch alle Blätter gehen und zwar so, dass zwischen zwei von ihnen ein und nur ein Verzweigungspunkt liegt; wir führen dadurch nf Querschnitte aus, und dadurch wird die Fläche in lauter Elementarflächen geteilt, nämlich in $nf-m$, denn man hat zu beachten, dass die Stücke, die in einem Verzweigungspunkt zusammenhängen, nur eine Elementarfläche bilden. Wir haben nun



[1]) *Riemann* hat diese Aufgabe auf einem ziemlich beschwerlichen Wege gelöst; die folgende Entwickelung verdanken wir *Neumann*.


Digitized by Google

$$x + 2n = nf - (nf - m) + 2,$$

oder

$$x = m - 2n + 2.$$

Ist ein Blatt schon ursprünglich punktiert, so wird die Zahl $m - 2n + 3$. Macht man in diesem Falle die Fläche einfach zusammenhängend, so muss, wie oben gezeigt wurde, eine gerade Anzahl von Querschnitten benutzt werden, z. B. $2p$; wir haben dann

$$2p = m - 2n + 2.$$

Dieser Ausdruck zeigt uns, dass die Summe der Ordnungen der Verzweigungspunkte eine gerade Zahl sein muss.

Wir sagen von der Riemannschen Fläche, dass sie von demselben Geschlecht sei wie die entsprechende algebraische Kurve, nämlich $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$, wenn n deren Ordnung, $d + r$ die Anzahl ihrer Doppelpunkte und Spitzen bedeutet.

Nun ist $m = n(n-1) - 2d - 2r$; hieraus ersehen wir, dass p das Geschlecht der Fläche ist. Also:

Ist eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht p, so machen eine Punktierung und $2\,p$ Querschnitte sie einfach zusammenhängend.

In Beisp. 3 haben wir $m = 2$, $n = 2$, also $p = 0$, was mit dem oben gefundenen Resultat übereinstimmt.

BEWEIS FÜR NEUMANNS AXIOM.

29. Wir denken uns eine zusammenhängende zweiseitige Fläche, nötigenfalls punktiert, so dass sie wenigstens *eine* Randkurve hat; wir lassen eine oder mehrere von den Randkurven sich stetig so ändern, dass das begrenzte Flächenstück beständig verkleinert wird; die Verkleinerung wird an jedem Punkte so lange fortgesetzt, bis der Abstand zwischen einem Randteil und dem nächsten anderen Randteil (zu derselben oder zu verschiedenen Randkurven gehörig) eine kleine endliche Grösse ist. Das Flächenstück wird dadurch in ein System von schmalen Streifen verändert, die sich auf alle möglichen Arten verzweigen

Digitized by Google

und vereinigen, sowie über und unter einander weglaufen können (ohne an einer solchen Stelle mit einander verbunden zu sein).

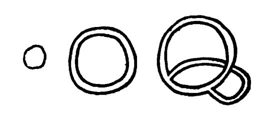
Wir haben uns gedacht, dass die Ränder sich in die Fläche hineinschneiden, aber jede auf diese Weise ausgeführte Änderung kann man sich eben so gut durch eine stetige Zusammenziehung der Fläche entstanden denken; die gegebene und die veränderte Fläche sind deshalb gleichwertig.

Wir können nun, ohne dadurch die Verhältnisse weniger allgemein zu machen, einige Voraussetzungen über die veränderte Fläche aufstellen:

1) *Kein Streifen endet blind,* denn thut er das, so lässt er sich durch Zusammenziehen fortschaffen. Jeder Streifen muss sich deshalb entweder verzweigen oder in sich selbst zurücklaufen. Der letzte Fall kann nicht eintreten, wenn die Fläche nur eine Randkurve hat.

2) *Wo ein Streifen sich verzweigt, teilt er sich nur in zwei andere.* Man kann nämlich durch stetige Änderung die Mündung eines Streifens längs dem einen Rande des Nachbarstreifens verschieben, und auf diese Weise die Anzahl der Streifen, die an derselben Stelle ausmünden, beständig vermindern, bis die aufgesstellte Voraussetzung erfüllt ist.

Die folgenden Figuren stellen die veränderten Formen der Elementarfläche, des Kreisringes und des punktierten Wulstes dar.



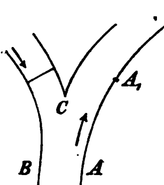
Wir wollen nun annehmen, dass unsere zusammenhängende Fläche vor der Zusammenziehung durch Querschnitte so umgeändert ist, dass wir nur eine Randkurve haben; wir wissen, dass sich das immer erreichen lässt, ohne dass die Fläche aufhört zusammenhängend zu sein; es kommt darauf an zu beweisen, dass sich auch in der Fläche mit einer Randkurve ein Querschnitt so anbringen lässt, dass die Fläche zusammenhängend bleibt.

Wir gehen nun von einem beliebigen Punkte A auf dem einen Rande eines Streifens aus und folgen dem Rande in positiver Richtung; da nur eine Randkurve existiert, so müssen

Digitized by Google

wir nach A zurückkehren, nachdem wir die ganze Randkurve durchlaufen haben; unterwegs müssen wir den A gerade gegenüberliegenden Randpunkt B passiert haben, und nach B sind wir in einer Richtung gekommen, die derjenigen, in der wir von A ausgegangen sind, gerade entgegengesetzt ist. Auf dem Wege von A nach B kennzeichnen wir den Rand, so dass wir hinterher sehen können, wo wir gewesen sind.

Von B gehen wir auf dem zurückgelegten Wege zurück, bis wir auf eine Verzweigung beim Punkte C treffen. Nun sind wir auf dem Wege entweder bei C gewesen oder nicht.



In dem letzten Fall können wir einen Querschnitt ausführen, wie die Figur zeigt, denn unser Weg hat uns von der einen Seite des Querschnittes nach der anderen geführt, ohne dass der Querschnitt passiert wurde.

Im ersten Falle können wir verfahren wie vorher, wenn wir A_1 an die Stelle von A, C an diejenige von B treten lassen; treffen wir, indem wir von C zurückgehen, auf eine Gabelung, bei deren Verzweigungspunkt wir nicht gewesen sind, so können wir unseren Querschnitt ausführen; im entgegengesetzten Fall gehen wir auf dieselbe Weise weiter. Da nun jeder unserer Wege ein Teil der vorhergehenden, und die Randkurve endlich ist, so können wir in dieser Weise nicht beständig fortfahren; wir müssen deshalb einmal zu einer Verzweigung kommen, wo wir einen Querschnitt ausführen können. *q. e. d.*

Nachdem wir unseren Querschnitt ausgeführt haben, haben wir eine zusammenhängende Fläche mit zwei Randkurven; diese sollen nun durch einen Querschnitt verbunden werden, und wir können zeigen, dass dieser sich immer quer über einen Streifen legen lässt. Im entgegengesetzten Falle müssten nämlich überall die gegenüberliegenden Ränder eines Streifens zu derselben Randkurve gehören; da die Fläche jedoch zusammenhängend ist, müssen wir von einem Streifen, dessen Ränder beide zu der einen Randkurve gehören zu einem zweiten gelangen können, dessen Ränder beide zu der anderen gehören. Der Übergang zwischen zwei solchen Streifen kann nur bei

Digitized by Google

einer Verzweigung stattfinden, aber dort ist er unmöglich, weil ein Rand des einen Streifens die Fortsetzung von einem Rande des anderen bildet.

Nachdem wir den zweiten Querschnitt ausgeführt haben, haben wir wieder eine zusammenhängende Fläche mit nur einer Randkurve; diese wird wie vorhin behandelt, und wir fahren so fort, bis wir eine einmal zusammenhängende Fläche erhalten haben; es lässt sich zeigen, dass diese eine Elementarfläche sein muss.

Bei jedem von uns ausgeführten Querschnitt durchschneiden wir einen Streifen, und indem wir die blinden Enden durch Zusammenziehen fortschaffen, haben wir einen Streifen weniger (den Streifen von einer Verzweigung bis zur folgenden gerechnet). Wenn alle Verzweigungen von der Fläche mit einer Randkurve fortgeschafft sind, so ist sie eine Elementarfläche; zu dieser Form müssen wir gekommen sein, wenn wir eine einmal zusammenhängende Fläche erhalten haben, denn im entgegengesetzten Fall müssten wir mehr Querschnitte ausführen, um zu einer Elementarfläche zu gelangen, und diese würde dadurch eine Zusammenhangszahl kleiner als Eins erhalten. Folglich:

Jede p mal zusammenhängende Fläche lässt sich durch $p-1$ Querschnitte in eine Elementarfläche verändern.

30. Wir wollen annehmen, dass wir eine p mal zusammenhängende Fläche hätten, und dass diese auf ein System von Streifen reduciert worden sei; dieses System wollen wir dann in die ursprüngliche Fläche hineinlegen und es als ein System von Querschnitten (Ringschnitte einbegriffen) in dieser betrachten. Die Zusammenhangszahl der Fläche hiernach sei x.

Das System von Streifen wird durch $p-1$ Querschnitte auf eine Elementarfläche reduciert; diese Querschnitte sind Brücken in der ursprünglichen Fläche und machen ihre Zahl zu $x+p-1$. Das System von Querschnitten ist durch die Brücken auf eine Punktierung reduciert, und diese macht die Zahl zu $p+1$. Hieraus folgt $x=2$.

Ist eine Punktierung vor dem Zusammenziehen hinzugefügt, so wird $x=1$; man kann das Zusammenziehen dadurch aus-

Digitized by Google

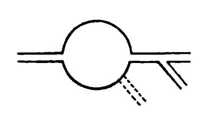
führen, dass man nur die durch die Punktierung gebildete Randkurve sich erweitern lässt; wenn man ihr hinterher nachgeht, so kann man von der einen Seite jedes Querschnittes zu der anderen hinübergelangen, so dass die Fläche dauernd zusammenhängend bleibt. Also:

Wenn man an einer zusammenhängenden Fläche eine Punktierung vornimmt und die entstandene kleine Kurve sich erweitern lässt, bis die Fläche auf ein System von Streifen reduciert ist, so wird die gegebene Fläche auf eine Elementarfläche reduciert, wenn die Streifen zu Querschnitten gemacht werden.

Man sieht leicht, das die erweiterte Kurve da, wo sie einer Randkurve folgt, ohne Schaden mit dieser zusammenfallen kann, ausgenommen da, wo sie sie verlässt. Hat man z. B. einen Kreisring, so wird die erweiterte Kurve sich dicht an beide Kreise heranlegen und an einer Stelle einen schmalen Streifen begränzen, der sie verbindet und den Querschnitt bildet.

NORMALFORMEN.

31. Wir wollen nun einen anderen Weg einschlagen, indem wir versuchen alle Verzweigungsstellen auf der Peripherie eines Kreises anzubringen. Um dies zu erreichen, geben wir einem Streifen an einer Stelle eine kreisförmige Erweiterung; der Streifen mündet dann an zwei Stellen in diesen Kreis; wir folgen dem einen Teile des Streifens, bis wir an eine Stelle kommen, wo ein anderer Streifen in ihn einmündet, und ziehen dessen Mündung durch stetige Änderung nach der Kreisperipherie hinunter; auf diese Weise können wir fortfahren, solange wir Verzweigungsstellen ausserhalb der Kreisperipherie treffen; wenn wir fertig sind, wird dann also jeder Streifen von der Kreisperipherie ausgehen und, ohne sich zu verzweigen, zurückkehren und wieder in die Kreisperipherie einmünden. Jeder Streifen wird deshalb einen Henkel am Kreise bilden.



Wir können jedoch unsere Fläche noch weiter vereinfachen, wenn wir beachten, dass eine Mündung sich durch stetige

Digitized by Google

Änderung längs dem Rande verschieben lässt. Die beiden Mündungen eines Henkels wollen wir durch denselben Buchstaben bezeichnen. Liegt keine Mündung zwischen a und a, so nennen wir aa einen *einfachen Henkel* oder schlechthin Henkel; eine Mündung, die nach a hin verschoben wird, gleitet längs dem äusseren Rande des Henkels hinunter nach dessen anderer Seite; da er nach derselben Stelle kommen würde, wenn der Henkel nicht da wäre, so können wir von diesem



ganz absehen. Zwei Henkel, deren Mündungen abwechselnd auf einander folgen, ohne dass Mündungen dazwischen liegen, bilden einen *Doppelhenkel;* auch einen solchen kann man sich als nicht vorhanden denken, da der Weg von seiner einen Seite nach der anderen führt, nachdem die vier Ränder der beiden Henkel und die dazwischen liegenden Stücke der Kreisperipherie durchlaufen sind. Wir wollen zeigen, dass das ganze System sich auf lauter einzelne Henkel und Doppelhenkel reducieren lässt.

Es seien a_1 und a_2 zwei beliebige gepaarte Mündungen; wir wollen versuchen sie so nahe wie möglich zusammen zu bringen. Liegt zwischen a_1 und a_2 ein Paar Mündungen b_1 und b_2. so können wir den Henkel $b_1 b_2$ benutzen, um die auf dem Stücke $b_1 a_1$ liegenden Mündungen, a_1 mitgerechnet, zwischen b_2 und a_2 hinüberzuführen; wir können deshalb voraussetzen, dass zwischen a_1 und a_2 nur entweder gar keine oder lauter ungepaarte Mündungen liegen, so dass wir z. B. die Reihenfolge $a_1 b_1 c_1 d_1 a_2$ haben. Die Mündungen b_1 und d_1 lassen sich mit Hülfe des Henkels $c_1 c_2$ herausschaffen. Wir haben deshalb nun entweder einen einzelnen Henkel $a_1 a_2$, oder die Reihenfolge der Mündungen ist $a_1 c_1 a_2$; c_2 liegt ausserhalb, kann aber auf dieselbe Weise nach a_1 oder a_2 gebracht werden. Dadurch haben wir einen Doppelhenkel erhalten, und können nun auf dieselbe Weise fortfahren, bis das ganze System reduciert ist; die einzelnen Henkel können sich auf alle möglichen Arten um einander herumwinden, ohne jedoch mit einander in Berührung

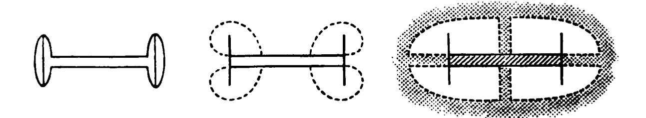
Digitized by Google

zu kommen; durchschneidet man die Henkel, ebnet sie aus und setzt sie wieder zusammen, so kann man die Windungen fortschaffen.

Wir haben also eine Normalform gefunden, auf die sich alle unsere Flächen durch stetige Änderung zurückführen lassen. *Die Normalform ist eine Kreisfläche, deren Rand mit Henkeln und Doppelhenkeln versehen ist.* Bei jedem Einzelhenkel bildet der eine Rand des Henkels in Verbindung mit dem zwischen den Mündungen liegenden Stücke der Kreisperipherie eine Randkurve; hieraus folgt, dass *bei einer Fläche mit nur einer Randkurve nur Doppelhenkel vorkommen.*

32. Die Richtigkeit der früher bewiesenen Sätze springt nunmehr in die Augen; sind p Henkel vorhanden, so wird die Fläche elementar, wenn jeder Henkel mittels eines Querschnittes durchschnitten wird; die Fläche ist $(p+1)$-mal zusammenhängend; ist nur eine Randkurve vorhanden, so wird die Anzahl der Schnitte gerade, da alle Henkel Doppelhenkel sind; *ein* Schnitt macht einen Doppelhenkel zu einem Henkel, und es giebt eine Randkurve mehr u. s. w.

Wir sehen nun, dass die zweimal zusammenhängende Fläche einen Henkel und keinen Doppelhenkel haben muss; sie hat also zwei Randkurven; eine solche Fläche besitzen wir im Kreisringe, gleichfalls in der zu $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ gehörenden Fläche, nachdem die beiden Punkte ∞ herausgeschnitten sind. Die dreimal zusammenhängende Fläche hat zwei Henkel, die Einzelhenkel sein können oder einen Doppelhenkel bilden; im ersten Falle haben wir drei Randkurven, im letzten eine. Eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, bei der das eine Blatt punktiert

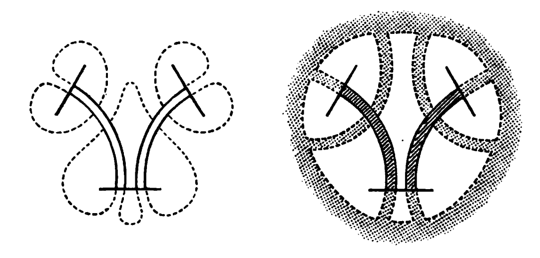


ist, mit vier Verzweigungspunkten, von denen zwei und zwei durch Verzweigungsschnitte verbunden sind, führt zu dieser

Digitized by Google

Normalform. (Man vergleiche die Figuren, welche die successiven Änderungen zur Anschauen bringen). Dasselbe gilt vom punktierten Wulst.

Sind sechs Verzweigungspunkte mit drei Verzweigungsschnitten vorhanden, und ist das eine Blatt punktiert, so erhält man zwei Doppelhenkel. (Die Figuren zeigen die Umformungen.) Die Punktierung im obersten Blatt wird zuerst erweitert, wie in der ersten Figur dargestellt ist, und diese lässt sich dann leicht in die zweite verwandeln.



Auf der Fläche in ihrer Normalform sieht man sofort die Periodenwege; ein solcher geht von einem Punkt der Kreisfläche durch einen der Henkel und zurück zum Ausgangspunkte. Durchschneiden wir den Henkel mittels eines Querschnittes, so können wir uns diesem von beiden Seiten nähern und zu zwei Punkten gelangen, die unendlich nahe bei einander liegen, aber auf verschiedene Seiten des Querschnittes; der Unterschied zwischen den Werten des Integrals in diesen beiden Punkten ist gleich dem zum Henkel gehörenden Periodicitätsmodul.

Man könnte nun die zur Integralfunktion gehörende Riemannsche Fläche mit unendlich vielen, der Normalform der Fläche kongruenten Blättern darstellen, mit den Querschnitten der Normalform als Verzweigungsschnitten; bei jedem solchen Schnitt ändert sich der Wert des Integrals stetig, wenn man über ihn in das nächste Blatt hinaufgeht. Man pflegt sich aber in der Regel damit zu begnügen, eins der kongruenten Blätter mit seinen Querschnitten zu betrachten, und man sagt dann, dass die Funktion in diesem Blatte eindeutig ist, aber unstetig

Digitized by Google

an den Verzweigungsschnitten, da sie einen für jeden Schnitt bestimmten konstanten Zuwachs erhält, wenn man den Schnitt überschreitet *ohne das Blatt zu verlassen.* Die Unstetigkeit ist hier also nur formell; eine reelle Unstetigkeit erhalten wir nur, wenn wir zur oberen Grenze gewisse Pole der integrierten Funktion nehmen.

KAPITEL V.

ABELSCHE INTEGRALE. ABELSCHER SATZ.

EINTEILUNG DER INTEGRALE.

Unter *Abel*schen Integralen versteht man Integrale algebraischer Funktionen; sie werden in Integrale erster, zweiter und dritter Gattung (espèce) geteilt.

Solange die Funktion unter dem Integralzeichen endlich, und der Weg, den wir durchlaufen, ebenfalls endlich ist, muss der Wert des Integrals auch endlich sein.

Wenn wir voraussetzen, dass die Funktion in der konstanten unteren Grenze endlich ist, und dass der Weg nicht durch Unstetigkeitspunkte führt, so wird der Wert des Integrals nur unendlich werden können, wenn die obere Grenze ein Pol ist, oder wenn der Weg unendlich lang ist. Das letzte kann wieder auf zwei Arten geschehen, entweder dadurch, dass man direkt zum Punkt ∞ geht, oder dadurch, dass man unendlich viele Periodenwege durchläuft.

Ein Integral erster Gattung ist ein solches, das nur dadurch unendlich werden kann, dass unendlich viele Periodenwege durchlaufen werden.

Hierzu ist nun zunächst erforderlich, dass in den, den Polen entsprechenden Reihenentwickelungen der Funktion unter dem Integralzeichen von negativen Exponenten nur solche zwischen den Grenzen 0 und -1 vorkommen. Man hat nämlich

$$\int \frac{dz}{(z-a)^p} = \frac{1}{1-p}(z-a)^{1-p};$$

Digitized by Google

dieser Ausdruck wird, wenn a die obere Grenze ist, Null für $p < 1$, unendlich für $p > 1$. Bei dem elliptischen Integral erster Art hat man bei den vier Polen $p = \frac{1}{2}$, so dass das Integral einen endlichen Wert erhält, wenn man es auf einem endlichen Wege zu einem dieser Pole führt.

Demnächst ist erforderlich, dass das Integral einen endlichen Wert behält, wenn man es zum Punkte ∞ führt, oder wenn die Funktion $f(z)$ ist, das

$$\int \frac{du}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

endlich bleibt, wenn Null die obere Grenze ist. Wir haben gesehen, dass auch dies beim elliptischen Integral erster Art stattfindet.

Ein Integral zweiter Gattung ist ein solches, das, von den Periodicitätsmoduln abgesehen, in gewissen Punkten unendlich wird, und zwar algebraisch unendlich.

Wir meinen damit, dass die Glieder der Reihenentwickelung, die negative Exponenten haben, bei der Integration algebraische Funktionen ergeben; dies setzt voraus, dass es Glieder giebt, für die $p > 1$, und kein Glied mit $p = 1$. Vom Punkte ∞ wird hier angenommen, dass er auf gewöhnliche Weise behandelt wird. Die Bedingungen sind für das elliptische Integral zweiter Art erfüllt, denn wir erhalten für den Punkt ∞

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz = -\int \sqrt{\frac{u^2-k^2}{u^2-1}}\, \frac{du}{u^2}$$
$$= -\int \frac{du}{u^2}\left(k + \frac{k^2-1}{2k} u^2 + \ldots\right),$$

ein Ausdruck, der sich in der Nähe von $u = 0$ wie $\frac{k}{u}$ verhält.

Ein Integral dritter Gattung ist ein solches, bei dem die Funktion unter dem Integralzeichen für gewisse Punkte ein Residuum hat, das von Null verschieden ist.

Das Integral erhält in diesem Falle Glieder von der Form

$$\int \frac{A}{z-a}\, dz = A\, l(z-a),$$

Digitized by Google

und man sagt deshalb, dass es logarithmisch unendlich im Punkte a wird, rein logarithmisch, wenn keine Glieder da sind, für die $p > 1$, und im entgegengesetzten Fall polarlogarithmisch. Später werden wir zeigen, dass die Summe aller Residuen einer Funktion gleich Null ist; daraus folgt, dass das Integral nicht in nur einem Punkte logarithmisch unendlich werden kann, und dass, wenn es in nur zwei Punkten logarithmisch unendlich wird, die entsprechenden Residuen gleich gross mit entgegengesetzten Vorzeichen sein müssen. Man hat zu beachten, dass das Residuum im Punkte ∞ für $f(z)$ gleich ist dem Residuum im Punkte 0 für

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Als Beispiele für Integrale dritter Art lassen sich die Integrale für $l\,z$ und $\arcsin z$ anführen; das erste ist logarithmisch unendlich in den Punkten 0 und ∞, das zweite in den beiden Punkten ∞. Das elliptische Integral

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\,\triangle(z,k)}$$

ist logarithmisch unendlich in den Punkten $\pm i\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$, die beide in beiden Blättern gefunden werden.

Ist $$s^2 = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{2n})$$

so gehört $$\int \frac{z^q}{s}\,dz \quad (q \text{ positiv ganz oder Null})$$

zu den *hyperelliptischen* Integralen; es ist endlich in allen Punkten a; für den Punkt ∞ erhalten wir

$$-\int \frac{du}{u^{q+2-n}\sqrt{(1-a_1 u)\ldots(1-a_{2n}u)}}.$$

Die Beschaffenheit der beiden Punkte ∞ ist deshalb abhängig von $q+2-n$.

(1) $q \leqq n-2$. Das Integral ist endlich und deshalb von erster Gattung.

Digitized by Google

(2) $q = n - 1$. Das Integral ist von dritter Gattung, denn es wird logarithmisch unendlich in den beiden Punkten ∞.

(3) $q > n - 1$. Wenn man den reciproken Wert der Quadratwurzel in einer Reihe, $a + bu + cu^2 + \ldots$, entwickelt, so wird man bei der Division mit u^{q+2-n} im allgemeinen Glieder erhalten, die in den Nennern die Exponenten 1, 2, 3 u.s.w. haben. Das Integral wird deshalb im allgemeinen polarlogarithmisch unendlich in den Punkten ∞.

Da eine Summe von Integralen erster Art wieder von erster Art sein muss, so gilt dies vom Integral

$$\int \frac{a + bz + cz^2 + \ldots + kz^{n-2}}{s} dz,$$

das linear aus $n - 1$ von einander unabhängigen Integralen erster Gattung zusammengesetzt ist. Später kommen wir auf diese Verhältnisse wieder zurück.

DIE ZU EINER ALGEBRAISCHEN KURVE GEHÖRENDEN INTEGRALE.

34. Es sei $f = f(z, s) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Kurve. Die Gleichung bestimmt s als eine algebraische, in der Regel mehrdeutige Funktion von z.

Von jedem Integral

$$\int F(s, z), dz,$$

wo F eine rationale Funktion bedeutet, sagen wir, dass es zur Kurve $f = 0$ gehört. Das Integral ist ein Abelsches und enthält keine anderen Irrationalitäten unter dem Integralzeichen als diejenige, die durch die Gleichung $f = 0$ bestimmt wird.

Statt eine Riemannsche Fläche zur näheren Bestimmung der Änderungen der mehrdeutigen Funktion zu benutzen, ziehen wir es hier vor, die durch die Gleichung dargestellte Kurve selbst zu gebrauchen. Einem bestimmten Punkte auf dieser entsprechen bestimmte Werte von s und z, und wenn der Punkt sich stetig auf der Kurve bewegt, verändern z und s sich auf eine bestimmte Weise, solange wir nicht an eine Stelle

Digitized by Google

kommen, wo zwei oder mehrere Werte von s zusammenfallen. Das Integral hat einen bestimmten Wert, wenn ein bestimmtes Kurvenstück gegeben ist, längs dem es genommen werden soll. Wir haben uns hier der Anschauung wegen s und z als reell gedacht, aber da man mit Hülfe einer Riemannschen Fläche auch definieren kann, was man unter einem Kurvenstück für komplexe s und z versteht, so gelten unsere Betrachtungen auch für solche Werte.

ABELS THEOREM.

35. Von dem unter diesem Namen bekannten berühmten Satz, der die Grundlage für viele weitergehende Untersuchungen abgegeben hat, kann man sagen, dass er eine Erweiterung der Theorie der symmetrischen Funktionen auf transcendente Funktionen darstellt.

Die Kurve $f = 0$ sei von $n$ter Ordnung, und zwei andere Kurven $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ seien von $m$ter Ordnung. Wir betrachten das Kurvenbüschel

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0$$

und lassen λ stetig von 0 bis ∞ variieren; dadurch wird die Kurve aus der Anfangslage $\varphi_1 = 0$ durch unmerckliche Übergänge übergehen in die Kurve $\varphi_2 = 0$.

Eine beliebige Kurve des Büschels schneidet im allgemeinen die feste Kurve f in mn Punkten; diese werden durch eine Gleichung vom Grade mn bestimmt, deren Koefficienten ganze rationale Funktionen von λ sind. Der Grad kann nur dann niedriger werden, wenn einer oder mehrere von den Schnittpunkten für alle Werte von λ im Unendlichen liegen. Solche Punkte sind während der Variation von λ feste Schnittpunkte und ohne Bedeutung für das Folgende.

Von der Theorie der Elimination her ist es bekannt, dass man aus den beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0$ eine Endgleichung in z bilden kann, die höchstens vom Grade mn ist, und eine Gleichung, die vom ersten Grade in s ist und dazu dienen kann, s rational durch z und λ auszudrücken.

Digitized by Google

Wir wollen in der folgenden Untersuchung davon ausgehen, dass die Gleichungen der Kurven so allgemein wie möglich sind, so dass die Endgleichung vom mnten Grade ist.

36. Wir betrachten nun ein beliebiges von den zur Kurve $f = 0$ gehörenden Integralen

$$\int F(s, z)\, dz$$

und suchen die Summe der Werte, die es annimmt, wenn es über die mn Kurvenstücke geführt wird, welche die Schnittpunkte durchlaufen, während λ von 0 bis ∞ variiert. Diese Wege sind vollständig bestimmt, da wir für jeden Wert von λ mn Schnittpunkte haben, von denen jeder, wenn λ die Zunahme $d\lambda$ erfährt, seinen unendlich kleinen Bogen durchläuft. Solche Punkte auf $f = 0$, in denen mehrere Werte von s zusammenfallen, bleiben ohne Bedeutung, denn da wir längs allen Kurvenstücken integrieren sollen, die hier zum Punkte führen, und längs allen denen, die vom Punkte fortführen, so ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die letzten als die Fortsetzungen der ersten zu betrachten sind.

Wenn wir λ von 0 bis ∞ auf einem bestimmten Wege variieren lassen, z. B. reell, so erhalten wir bestimmte Kurvenstücke; wählen wir einen anderen Weg für λ, so werden die Stücke sich verändern, aber da sie in beiden Fällen von denselben Anfangspunkten zu denselben Endpunkten führen, so kann der Unterschied in der gesuchten Summe nur aus Periodicitätsmoduln bestehen.

Wir führen nun λ als unabhängige Variable in das Integral ein; wir haben gesehen, dass s sich rational durch z und λ ausdrücken lässt, und aus der Endgleichung erhalten wir $\frac{dz}{d\lambda}$ rational durch dieselben Grössen ausgedrückt. Dadurch nimmt das Integral die Form

$$\int_0^\infty F_1(z, \lambda)\, d\lambda$$

an, wo F_1 eine rationale Funktion bedeutet.

Digitized by Google

Wenn λ die Zunahme $d\lambda$ erfährt, so durchlaufen die mn Schnittpunkte unendlich kleine Bogenelemente; diese Bogenelemente geben Integralelemente, deren Summe

$$[F_1(z_1, \lambda) + F_1(z_2, \lambda) + F_1(z_3, \lambda) + \ldots F_1(z_{mn}, \lambda)]\, d\lambda$$

beträgt, wo $z_1, z_2 \ldots z_{mn}$ die mn Wurzeln der Endgleichung bezeichnen. Wir haben hier in der Klammer eine symmetrische rationale Funktion von den Wurzeln der Endgleichung, und eine solche lässt sich wie bekannt rational durch die Koefficicienten der Gleichung ausdrücken; wir wollen die Summe durch V bezeichnen. V ist also eine *rationale* Funktion von λ, und enthält als Konstanten die Koefficienten in den Gleichungen der gegebenen Kurven.

Auf die Weise haben wir das Integralelement $Vd\lambda$ gefunden, und die ganze gesuchte Summe wird dann ausgedrückt durch

$$S = \int_0^\infty V d\lambda. \tag{1}$$

Wenn wir jetzt die Kurvenstücke nur bis zu einer gewissen Kurve des Büschels berücksichtigen wollen, so wird der Unterschied nur der, dass wir den zu dieser Kurve gehörenden Wert von λ zur oberen Grenze für das Integral S nehmen müssen. Dieses lässt sich wie bekannt durch rationale Funktionen und durch Logarithmen ausdrücken. Es ist gleichgültig, welchen Weg wir λ von der unteren bis zur oberen Grenze gehen lassen; natürlicherweise hat dieser Weg Einfluss auf die Bestimmung derjenigen Kurvenstücke, die von dem ersten System von Schnittpunkten zu dem letzten führen, aber das Resultat zeigt, dass die bei einer solchen Veränderung der Wege hinzugekommenen Periodicitätsmoduln sich aufheben oder jedenfalls auf solche reduciert werden müssen, die dem Integral S angehören.

37. Wir wollen die Funktion V sogleich genauer bestimmen, können aber schon jetzt verschiedene wichtige Resultate aus der gewonnenen Formel ableiten.

Ist das gewählte Integral von erster Gattung, so kann es auf keinem Kurvenstücke unendlich werden, ebensowenig wie

Digitized by Google

die gefundene Summe. Diese kann deshalb nicht Logarithmen oder gebrochene rationale Funktionen von λ enthalten, da wir im entgegengesetzten Falle für gewisse Werte von λ $S = \infty$ erhalten würden. Es dürfen auch keine ganzen Funktionen vorkommen, da solche gleichzeitig mit λ ins Uendliche wachsen. S muss deshalb notwendigerweise eine Konstante sein, und da S für ein unendlich kleines λ selbst unendlich klein sein muss, so kann diese Konstante nur Null sein. Folglich:

Die Summe der Werte des Integrals, genommen auf den mn Kurvenstücken, ist Null, wenn das Integral von erster Gattung ist.

Ist das Integral von zweiter Gattung, so kann es selbst nicht, und deshalb ebensowenig die Summe, an irgend welcher Stelle logarithmisch unendlich werden. Folglich:

Ist das Integral von zweiter Gattung, so wird die Summe eine rationale Funktion von λ.

Ist das Integral dagegen von dritter Gattung, so wird es gewisse Punkte geben, in denen es logarithmisch unendlich wird. Ist λ_1 derjenige Wert von λ, der zu der Kurve des Büschels gehört, die durch einen solchen Punkt geht, so muss S das Glied $k \cdot l(\lambda - \lambda_1)$ enthalten, wo k eine Konstante bedeutet, nämlich das zu λ_1 gehörende Residuum.

Unter einem *Normalintegral dritter Gattung* versteht man ein solches, das keine polarlogarithmischen Unendlichkeitspunkte und nur zwei rein logarithmische Unendlichkeitspunkte hat. Für ein solches Integral kann S keine algebraischen Glieder enthalten und muss deshalb die Form

$$S = \int \left(\frac{k_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{k_2}{\lambda - \lambda_2} \right) d\lambda$$

annehmen.

Da das Integral indessen nicht unendlich wird für andere Werte von λ als λ_1 und λ_2, so muss die Summe der zu diesen Werten gehörenden Residuen Null sein. Durch Hinzufügen eines passenden konstanten Faktors kann man dafür sorgen, dass die Residuen die Werte $+1$ und -1 erhalten, und dadurch wird

Digitized by Google

$$S = l\,\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2}. \tag{2}$$

Liegen die beiden Punkte auf derselben Kurve des Büschels, so wird $S = 0$.

38. Der Abelsche Satz gewinnt in der Regel um so mehr an Anwendbarkeit, je mehr man die Anzahl der Kurvenstücke, die das Integrale durchlaufen soll, reducieren kann. Eine solche Reduktion erhält man, wenn man die bewegliche Kurve durch feste Punkte der Kurve f gehen lässt, da dann für jeden solchen Punkt ein Kurvenstück fortfällt; ja ist der Punkt ein Doppelpunkt, so fallen zwei Stücke fort u. s. w. Solchen festen Punkten entsprechen in der Gleichung zwischen z und λ Faktoren, die λ nicht enthalten und sich fortdividieren lassen, so dass die Gleichung auf eine andere reduciert wird, die von niedrigerem Grade als mn ist und nur die beweglichen Schnittpunkte bestimmt. Es lässt sich beweisen, *dass man immer das Kurvenbüschel so wählen kann, dass die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte auf $p + 1$ reduciert wird, wo p das Geschlecht der gegebenen Kurve ausdrückt.*

Um das zu erreichen, setzen wir $m = n - 2$[1]; dann können wir über $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Koefficienten disponieren, oder, wenn wir den einen als variablen Parameter behalten wollen, über $\frac{n^2 - n - 4}{2}$. Diese können wir durch Auflösung linearer Gleichungen so bestimmen, dass die Kurve durch die $d + r$ Doppelpunkte und Spitzen, und durch

$$\frac{n^2 - n - 4}{2} - d - r$$

willkürlich gewählte von den übrigen Punkten der gegebenen Kurve geht. Feste Schnittpunkte giebt es dann

$$\frac{n^2 - n - 4}{2} + d + r,$$

[1]) Man kann auch $m = n - 1$ setzen.

Digitized by Google

und subtrahiert man diese von n^2-2n, so ergeben sich

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-r+1=p+1$$

bewegliche Schnittpunkte.

Von diesen bestimmt einer den Parameter und dadurch die p übrigen. Da die festgelegten einfachen Schnittpunkte beliebig gewählt werden können, so lassen sie sich auch als beweglich betrachten, indem mehrere von den Koefficienten der Gleichung $F=0$ als veränderliche Parameter betrachtet werden; in allen Fällen werden jedoch p von den Schnittpunkten bestimmt sein, wenn die übrigen festgelegt sind. Sie werden durch eine Gleichung vom Grade p bestimmt, in deren Koefficienten die Koordinaten der festgelegten Schnittpunkte enthalten sind.

Ist f vom Geschlechte Null, so können wir also dafür sorgen, dass wir nur einen beweglichen Schnittpunkt erhalten; es bleibt dann nur ein Integral auf der linken Seite der *Abelschen* Gleichung, und man kann nicht $S=0$ haben. *Es gehört deshalb kein Integral erster Art zu Kurven vom Geschlechte Null.* Wenn mann s und z rational durch λ ausdrückt, so wird durch Einführung von λ als unabhängige Variable jedes zur Kurve gehörige Integral in das Integral einer rationalen Funktion umgewandelt; es kann deshalb zu keinen anderen Transcendenten führen als zu Logarithmen.

Beisp. 1. Die Kurve möge der Kreis $z^2+s^2=1$ sein; wenn wir mit dem Geradenbüschel $s-1=\lambda z$ schneiden, so erhalten wir einen beweglichen Schnittpunkt. Wir wählen das Integral dritter Art, $\int\frac{dz}{s}$, und beginnen im Punkte (0, 1), der $\lambda=0$ entspricht. Das Integral ist dann arcsin z. Wenn wir nun z und s eliminieren, so finden wir

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=-2\int_0^\lambda\frac{d\lambda}{1+\lambda^2};\ z=-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Hier wird das erste Integral logarithmisch unendlich in

den beiden Punkten ∞, die bei der, durch die Relation zwischen z und λ bestimmten, conformen Abbildung in die beiden Punkte $\pm i$ übergehen, in denen das zweite Integral logarithmisch unendlich wird.

Beisp. 2. $s^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$; die Kurve hat zwei unendlich ferne Doppelpunkte (einen Selbstberührungspunkt) und ist deshalb vom Geschlechte 1. Das Parabelbüschel $s = \lambda\,(1 - z^2)$ schneidet die Kurve in vier unendlich fernen Punkten, in den beiden festen Punkten $(1, 0)$ und $(-1, 0)$, und in zwei beweglichen Punkten, bestimmt durch $z^2(k^2 - \lambda^2) = 1 - \lambda^2$. Einem $\lambda = \pm 1$ entspricht $z = 0$, $s = \pm 1$.

Nehmen wir nun das elliptische Integral erster Art,

$$\int_0^z \frac{dz}{s},$$

so wird der Anfangswert $z = 0$, $s = +1$, dem Werte $\lambda = +1$ entsprechen. Wir finden deshalb, da *einem* Werte von λ zwei Werte von z entsprechen, die gleich gross mit entgegengesetzten Vorzeichen sind,

$$\int_0^z \frac{dz}{s} + \int_0^{-z} \frac{dz}{s} = 0,$$

ein Resultat, das sich leicht direkt aus dem gegebenen Integral ableiten lässt. Grösseres Interesse hat das Integral, zu dem man gelangt, wenn man drei von den Schnittpunkten beweglich sein lässt, ein Fall, den wir später betrachten werden.

NÄHERE BESTIMMUNG DER FUNKTION V.

39. Bevor wir zu einer näheren Bestimmung von V übergehen, wollen wir einen zur Theorie der Gleichungen gehörenden Satz ableiten, der uns später von Nutzen sein wird.

Es sei $f(x) = 0$ eine Gleichung $n$ten Grades mit den *ungleichen* Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_n$, während $F(x)$ ein beliebiges Polynom in x bedeutet. Durch Zerlegung erhalten wir dann die Identität

Digitized by Google

$$\frac{x F(x)}{f(x)} = k + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + \sum \frac{x_i F(x_i)}{(x - x_i) f'(x_i)},$$

wo die Summation auf alle Wurzeln ausgedehnt wird. Für $x = 0$ erhält man hieraus

$$\sum \frac{F(x_i)}{f'(x_i)} = k. \tag{3}$$

Die Formel zeigt, dass die symmetrische Funktion der Wurzeln immer Null ist, wenn der Grad von $F(x)$ entweder $n-2$ oder eine niedrigere Zahl ist.

Wir kehren nun zurück zu unserer Kurve $f = 0$ und dem Kurvenbüschel $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = F = 0$. Wenn wir λ die Zunahme $d\lambda$ erteilen, und den Koordinaten der Schnittpunkte die entsprechenden Zunahmen dz und ds, so haben wir

$$\frac{\partial f}{dz} dz + \frac{\partial f}{\partial s} ds = 0; \; \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial s} ds + \varphi_2 \, d\lambda = 0,$$

woraus

$$dz = \frac{\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial s}} d\lambda. \tag{4}$$

Nun lassen sich nach der Eliminationstheorie immer solche ganze Funktionen A, B, C und D von s und z finden, dass identisch

$$Af + BF = Z; \; Cf + DF = S, \tag{5}$$

wo Z und S Funktionen von z und s sind, im allgemeinen vom Grade mn. Die Koefficienten sind Funktionen von λ. A und B sind vom Grade $m-1$ und $n-1$ in s, $mn-n$ und $mn-m$ in z; umgekehrt fur C und D.

Durch Differentiation dieser Gleichungen, und wenn wir diejenigen Glieder, die f oder F als Faktor enthalten, fortlassen, erhalten wir, gültig für alle Schnittpunkte,

Digitized by Google

$$A\frac{\partial f}{\partial z}+B\frac{\partial F}{\partial z}=Z';\ A\frac{\partial f}{\partial s}+B\frac{\partial F}{\partial s}=0;$$

$$C\frac{\partial f}{\partial z}+D\frac{\partial F}{dz}=0;\ C\frac{\partial f}{\partial s}+D\frac{\partial F}{\partial s}=S',$$

woraus, wenn

$$AD-BC=\triangle,$$

$$\triangle\frac{\partial f}{\partial z}=Z'D;\ \triangle\frac{\partial F}{\partial z}=-Z'C;$$

$$\triangle\frac{\partial f}{\partial s}=-S'B;\ \triangle\frac{\partial F}{ds}=S'A,$$

oder

$$\triangle\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial s}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial s}\right)=Z'S',$$

wodurch

$$dz=\frac{\triangle\varphi_2\frac{\partial f}{\partial s}}{Z'\,S'}\,d\lambda. \tag{6}$$

Nun möge die Funktion unter dem Integralzeichen eines zur Kurve gehörenden Integrals bezeichnet werden durch $U:\frac{\partial f}{\partial s}$, wo U eine ganze rationale Funktion von s und z bedeutet. Dann erhalten wir

$$V=\sum\frac{\triangle\varphi_2 U}{Z'\,S'}, \tag{7}$$

wo die Summation auf alle Schnittpunkte ausgedehnt werden soll. Nun zeigen jedoch die Gleichungen

$$\triangle f=ZD-SB;\ \triangle F=AS-CZ,$$

dass ein Wertepaar, welches Z und S zu Null macht, ohne zugleich f und F zu Null zu machen, $\triangle$ zu Null machen muss; wir können deshalb, wenn wir voraussetzen, dass $S=0$ und $Z=0$ keine gleichen Wurzeln haben, statt für die mn Wertepaare zu summieren, die zu den Schnittpunkten gehören, ebenso gut für die m^2n^2 Wertepaare summieren, die man erhält, wenn man jede Wurzel von $Z=0$ mit jeder Wurzel von $S=0$ verbindet. Das führen wir aus, indem wir im Zähler jedes Glied

Digitized by Google

für sich nehmen; ein solches Glied ergiebt, abgesehen von den Koefficienten,

$$\sum \frac{z^p s^q}{S' Z'} = \sum \frac{z^p}{Z'} \cdot \sum \frac{s^q}{S'};$$

dieser Ausdruck ist nach dem oben bewiesenen Satze gleich Null, wenn einer der Exponenten p und q kleiner ist als $mn-1$. *Wir erhalten also $V=0$, wenn der Zähler des Bruches unter dem Summationszeichen vom Grade $2mn-3$ oder von niedrigerem Grade ist.*

Ist der Zähler vom Grade $2mn-2$, so wird die Summe gleich dem Verhältnis der Koefficienten im Zähler und Nenner des Gliedes $z^{mn-1} s^{mn-1}$.

REDUKTION DER INTEGRALE.

40. Um das gefundene Resultat anwenden zu können wollen wir nun eine kurze Übersicht geben über die Reduktion des allgemeinen Integrals auf einfachere Formen; eine ausführliche Behandlung findet sich in: *A. Clebsch* und *P. Gordan*, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1866.

Das allgemeine zu $f=0$ gehörende Integral lässt sich ohne Beschränkung seiner Allgemeinheit

$$\int \frac{M\,dz}{N \frac{\partial f}{\partial s}}$$

schreiben, wo M und N ganze Funktionen von s und z sind. Nun kann man, wenn es erforderlich ist mit Hülfe einer einfachen linearen Transformation, dafür sorgen, dass der Grad von M höchstens um $n-3$ grösser ist als derjenige von N. Man kann nämlich für s, z und dz beziehungsweise

$$\frac{s}{t}, \frac{z}{t}, \frac{t\,dz - z\,dt}{t^2}$$

setzen. Dadurch wird der Ausdruck unter dem Integralzeichen homogen vom Grade Null in s, z und t, während die Gleichung

Digitized by Google

$f = 0$ homogene Form annimmt und die Abhängigkeit zwischen $\frac{s}{t}$ und $\frac{z}{t}$ bestimmt. Das Integral ist deshalb nur abhängig von einem dieser Quotienten und bleibt unverändert, wenn man an Stelle von t eine beliebige Grösse setzt. Setzen wir $z + t_1$ statt t, so wird der Ausdruck vom Grade Null in z, s und t_1 werden; da nun $t\,dz - z\,dt$ vom Grade 2 ist, $\frac{\partial f}{\partial s}$ vom Grade $n-1$, so wird der Grad von M um $n-3$ grösser als derjenige von N, und diese Beziehung ändert sich, wenn wir nun $t_1 = 1$ setzen, nur in solchen besonderen Fällen, in denen t_1 Faktor im Zähler oder Nenner geworden ist; in diesen Fällen können wir $az + t_1$ statt t setzen und einen passenden Zahlenwert für a wählen.

Die Gleichung $f = 0$ hat eine andere Form durch die Transformation erhalten, aber die lineare Form dieser bringt es mit sich, dass Ordnung, Geschlecht u. s. w. unverändert sind.

Wir können also voraussetzen, dass im obenstehenden Integral $M:N$ vom Grade $n-3$ ist; nun giebt es zwei ganze Funktionen H und K von der Beschaffenheit, dass

$$HN + Kf = Z_1,$$

wo Z_1 eine ganze Funktion von z allein ist. Multiplicieren wir Zähler und Nenner mit H, und beachten wir, dass wir es nur mit Punkten auf der gegebenen Kurve zu thun haben, so dass wir $f = 0$ setzen können, so erhalten wir für die Funktion unter dem Integralzeichen den neuen Ausdruck

$$\frac{HM}{Z_1 \frac{\partial f}{\partial s}}$$

bei dem der Grad des Zählers um $n-3$ grösser ist als derjenige des Nenners. Mit Hülfe der Gleichung $f = 0$ können wir dafür sorgen, dass s im Zähler nicht mit höheren Exponenten als $n-1$ vorkommt, und wenn wir vom Zähler $\frac{\partial f}{\partial s}$, multipliciert mit einer passenden rationalen Funktion von z, subtrahieren, so können wir das Glied fortschaffen, welches

Digitized by Google

s^{n-1} enthält. Der vom Bruche subtrahierte Teil ist eine rationale Funktion von z, die durch Integration nur algebraische Funktionen und Logarithmen einführen kann.

Wir dividieren nun den Zähler durch Z_1 und erhalten dadurch eine ganze Funktion vom Grade $n-3$ und einen Rest, der in Bezug auf s höchstens vom Grade $n-2$ ist, und in Bezug auf z von niedrigerem Grade als Z_1. Wenn wir die einzelnen Glieder des Restes durch Z_1 dividieren, so erhalten wir als Koefficienten zu den Potenzen von s rationale Brüche in z, die auf die gewöhnliche Weise zerlegt werden. Hat Z_1 keine gleich grossen Faktoren, so ergiebt die Zerlegung Brüche mit Nennern von der Form $z-a$. Sind gleich grosse Faktoren vorhanden, so erhält man Brüche mit Nennern von der Form $(z-a)^p$. Diese lassen sich aus den ersten durch Differentiation mit Bezug auf a bilden, wenn a als variabler Parameter genommen wird.

Wir sehen also, dass ausser Integralen von rationalen Funktionen und Integralen die sich aus anderen durch Differentiation mit Bezug auf einen Parameter bilden lassen, nur noch zwei Arten derselben zu untersuchen übrig bleiben, nämlich

$$(\alpha) \qquad \int \frac{U\,dz}{\frac{\partial f}{\partial s}}$$

und

$$(\beta) \qquad \int \frac{Q\,dz}{(z-a)\frac{\partial f}{\partial s}},$$

wo U und Q ganze Funktionen von s und z sind, beziehungsweise von den Graden $n-3$ und $n-2$. Der Faktor $z-a$ kann in besonderen Fällen fortfallen, nämlich wenn die Gerade $z=a$ in die unendlich ferne Gerade übergegangen ist. Wir betrachten die dadurch entstehende Form als unter (β) gehörig ohne sie der früher angegebenen Transformation zu unterwerfen.

Da das letzte Integral logarithmisch unendlich in den Punkten ist, in denen $z=a$ die Kurve schneidet, so kann es Integrale erster Gattung nur unter den ersten geben; da diese wegen des Grades des Zählers nur existieren können für $n \geqq 3$,

Digitized by Google

so giebt es keine Integrale erster Gattung auf Kurven erster und zweiter Ordnung. (Vergl. 38).

41. Da U in seiner allgemeinsten Form $\frac{n(n-3)}{2}+1$ Koefficienten hat, so lässt sich jedes Integral der angegebenen Form aus $\frac{n(n-3)}{2}+1$ speciellen von ihnen durch Multiplikation mit passenden Konstanten und Addition herstellen, jedoch müssen die speciellen so gewählt sein, dass sie linear von einander unabhängig sind. Wir wollen nun so viele wie möglich von den speciellen so bilden, dass sie von erster Gattung werden.

Der Bruch unter dem Integralzeichen wird unendlich für $\frac{\partial f}{\partial s}=0$, d. h. in Doppelpunkten und Spitzen und solchen anderen Punkten, in denen die Tangente senkrecht auf der z-Axe steht. Ist (z_1, s_1) ein Punkt der letzten Art, so hat man für ihn $\frac{\partial f}{\partial s}=0$. In der Nähe des Punktes hat man deshalb, unter a und b die Werte von $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ verstanden, wenn man die Koordinaten des Punktes einsetzt,

$$0=f(z, s)=a(z-z_1)+\tfrac{1}{2}b(s-s_1)^2+\ldots;$$
$$\frac{\partial f}{\partial s}=b(s-s_1)+\ldots,$$

wo nur die Glieder niedrigster Ordnung angeführt sind. Die erste Gleichung zeigt, dass $s-s_1$ dem Ausdruck $\sqrt{z-z_1}$ proportional ist, und die zweite, das dasselbe von $\frac{\partial f}{\partial s}$ gilt. Das Integral ist deshalb in der Nähe eines solchen Punktes proportional

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z-z_1}}$$

oder $\sqrt{z-z_1}$, hält sich also innerhalb endlicher Grenzen. Anders verhält es sich mit einem Doppelpunkt; in einem solchen

Digitized by Google

ist sowohl $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ als $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, und die Reihenentwickelung beginnt mit Gliedern von der Form

$$\tfrac{1}{2}\left[b(s-s_1)^2 + 2c(s-s_1)(z-z_1) + d(z-z_1)^2\right] + \ldots,$$

woraus hervorgeht, dass $z-z_1$ und $s-s_1$ proportional sind; da nun

$$\frac{\partial f}{ds} = b(s-s_1) + c(z-z_1) + \ldots,$$

so sind auch $\frac{\partial f}{\partial s}$ und $z-z_1$ proportional. Da der Zähler aber in der Regel nicht proportional $z-z_1$ ist, so wird das Integral im allgemeinen in einem Doppelpunkte der Kurve logarithmisch unendlich; ist der Doppelpunkt eine Spitze, so zeigt eine ähnliche Untersuchung, dass das Integral dort algebraisch unendlich wird wie

$$A(z-z_1)^{-\frac{1}{2}} + B(z-z_1)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Wird jedoch für den betrachteten Punkt der Zähler gleich Null, oder mit anderen Worten, geht die Kurve $U=0$ durch den Doppelpunkt oder die Spitze, so ist der Zähler in der Nähe dieses Punktes dem Ausdruck $z-z_1$ proportional, und das Integral ist endlich in der Nähe des Punktes. Hieraus ergiebt sich, dass *die Bedingung dafür, dass das Integral von erster Gattung ist, darin besteht, dass die Kurve $U=0$ durch alle Doppelpunkte und Spitzen der Kurve $f=0$ geht.* Von solchen giebt es $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$, wo p das Geschlecht der Kurve bedeutet. Soll $U=0$ durch alle diese Punkte gehen, so wird die Anzahl der beliebigen Koefficienten reduciert auf

$$\frac{n(n-3)}{2} + 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p = p.$$

Auf einer Kurve vom Geschlechte p giebt es also p von einander linear unabhängige Integrale erster Gattung.

Wir bestimmen nun, um die fehlenden speciellen Integrale zu bilden, die Kurve $U=0$ so, dass sie durch alle Spitzen und Doppelpunkte, mit Ausnahme eines einzigen geht. Sie ist da-

7

Digitized by Google

durch zwar nicht vollständig bestimmt, aber die fehlenden Bestimmungen lassen sich beliebig wählen. Wir erhalten dadurch ein Integral dritter Gattung, das nur in dem einen Doppelpunkt unendlich wird. Auf diese Art können wir so viele specielle Integrale bilden, als $f = 0$ Doppelpunkte und Spitzen hat, und jedes von ihnen wird nur in einem von diesen Punkten unendlich. Da diese Integrale in verschiedenen Punkten unendlich sind, so müssen sie linear unabhängig von sich und von den p Integralen erster Gattung sein. Hätte man dagegen die oben genannten beliebigen Bestimmungen benutzt, um zwei in demselben Doppelpunkte unendliche Integrale zu bilden, so würde das eine von diesen sich linear durch das andere und durch ein Integral erster Gattung ausdrücken lassen.

Wenn $d + r$ die Anzahl von Doppelpunkten und Spitzen bezeichnet, so haben wir jetzt $p + d + r$ specielle Integrale, und diese Zahl stimmt genau überein mit der Anzahl von Gliedern im Zähler von (α).

42. War Q so viel wie möglich reduciert, so war, wie wir gezeigt haben, die Anzahl der Glieder $n-1$, und wir müssen hier deshalb $n-1$ specielle Integrale bilden. Nun schneidet die Gerade $z - a = 0$ die Kurve $f = 0$ in n Punkten. Es lässt sich aber immer eine Kurve von der Ordnung $n-2$ durch $n-2$ von diesen Punkten, durch alle Doppelpunkte und Spitzen, und ausserdem durch p willkürlich gewählte Punkte legen. Dadurch bestimmen wir Integrale, die nur unendlich in zwei Punkten werden, und wenn wir den einen von diesen für alle Integrale gemeinschaftlich sein lassen, so erhalten wir eben die $n-1$ Integrale, für die wir Verwendung haben. Die Zähler erhalten nicht die specielle Form, auf die wir Q reduciert haben, aber der Unterschied besteht in Ausdrücken, in denen $z-a$ aufgeht, und die deshalb Integrale bestimmen, welche unter (α) gehören.

Geht die Gerade $z-a = 0$ durch einen Doppelpunkt, so wird die Kurve von der Ordnung $n-2$, die wir durch die übrigen $n-2$ Schnittpunkte und durch alle Doppelpunkte und Spitzen legen, $n-1$ Punkte mit der Geraden gemeinsam haben und sie deshalb ganz enthalten. Das Integral fällt deshalb in diesem

Digitized by Google

Falle unter die Form (α), so dass man die zu dieser Form gehörenden Integrale dritter Gattung als besondere Fälle der zu (β) gehörigen betrachten kann. Integrale dritter Gattung, die nur in zwei getrennten oder zusammenfallenden Punkten unendlich werden, heissen wie früher bemerkt *Normalintegrale.* Die zusammenfallenden Punkte sind getrennt im Riemannschen Sinne.

43. Nun wollen wir die früher ausgeführte Umformung auf die Integrale (α) anwenden.

Dadurch erhalten wir

$$\int \frac{U\,dz}{\frac{\partial f}{\partial s}} = \int \frac{\triangle \varphi_2 U}{Z' S'} d\lambda.$$

Hier sind in dem ersten Integral U, dz und $\frac{\partial f}{\partial s}$ beziehungsweise von den Graden $n-3$, 1 und $n-1$, der Ausdruck unter dem Integralzeichen also vom Grade -1. Dasselbe muss dann vom Ausdruck unter dem anderen Integralzeichen gelten, und da $d\lambda$ nach dem Ausdruck für F vom Grade Null ist, so muss der Zähler des Bruches vom Grade $2mn-3$ sein; aber diesen Fall haben wir eben untersucht und $V=0$ gefunden. Wir müssen jedoch im Auge behalten, dass nach unserer Voraussetzung $S=0$ und $Z=0$ keine gleichen Wurzeln haben, dass also das Kurvenbüschel $F=0$ keinen Grundpunkt in einem Doppelpunkt oder einer Spitze hat. Diese Bedingung können wir indessen fortfallen lassen, wenn das Integral in einem solchen Grundpunkt nicht unendlich ist, denn der Fall lässt sich dann als Grenzfall betrachten. Folglich:

Für alle unter (α) *gehörenden Integrale ist die Abelsche Integralsumme Null, vorausgesetzt, dass die bewegliche Kurve keinen festen Punkt in einem Doppelpunkte oder in einer Spitze hat, in dem das gegebene Integral unendlich wird.*

Wir wollen z. B. $f=0$ die Gleichung des Blattes von *Descartes* sein lassen. Da die Kurve von dritter Ordnung ist, so ist U konstant. Die bewegliche Kurve ist eine Gerade, und so lange diese in zwei oder drei beweglichen Punkten schneidet, ist die Integralsumme Null. Das ist dagegen nicht der Fall,


Digitized by Google

wenn die Gerade durch den Doppelpunkt der Kurve geht und auf die Weise nur einen beweglichen Schnittpunkt liefert.

Für die Integrale (ρ) erhalten wir

$$V = \sum \frac{\Delta \varphi_2 Q}{(z-a)\, Z'\, S'},$$

wo die Summation sich auf die $m^2 n^2$ Wertepaare von z und s erstreckt. Der Zähler, der vom Grade $2mn-2$ ist, wird in Teile zerlegt, von denen der erste durch $z-a$ teilbar ist, während der andere z nicht enthält. Der erste Teil liefert Brüche von der bei den Integralen (α) behandelten Form; der andere ist eine ganze Funktion von s, von der man voraussetzen darf, dass sie, da alle Werte von s der Gleichung $S=0$ genügen, vom Grade $mn-1$ ist. Bezeichnen wir sie durch S_1, so haben wir

$$V = \sum \frac{1}{(z-a)\, Z'} \cdot \sum \frac{S_1}{S'}.$$

Wenn wir auch hier voraussetzen, das die Gleichungen $Z=0$ und $S=0$ keine gleichen Wurzeln haben, und unter Z_a den Wert von Z für $z=a$ verstehen, so ist

$$\sum \frac{1}{(z-a)\, Z'} = -\frac{1}{Z_a}.$$

Im Bruche $\frac{S_1}{S'}$ sind sowohl Zähler wie Nenner vom Grade $mn-1$. Der Wert $\sum \frac{S_1}{S'}$ ist deshalb gleich dem Verhältnis der Koefficienten von s^{mn-1} in S_1 und S'. Wird dieses Verhältnis durch $-\psi(\lambda)$ bezeichnet, so ist

$$V = \frac{\psi(\lambda)}{Z_a}.$$

Ist die Gerade $z=a$ unendlich fern gerückt, so dass der Faktor $z-a$ im Nenner fehlt, so lässt der Zähler sich nicht wie oben zerlegen. Die Summe wird dann gleich dem Verhältnis zwischen den Koefficienten von $(zs)^{mn-1}$ im Zähler und Nenner des Bruches.

Z_a ist vom Grade n in λ, denn $Z_a=0$ bestimmt die Werte von λ, die den n Punkten entsprechen, in denen $f=0$ von



Digitized by Google

$z = a$ geschnitten wird. $\psi(\lambda)$ muss eine ganze Funktion werden; allerdings muss der Koefficient von s^{mn-1} in S' oder von s^{mn} in S, wenn er gleich Null gesetzt wird, die Werte von λ bestimmen, die den unendlich fernen Schnittpunkten entsprechen, und deshalb vom Grade n in λ sein, aber er muss als Faktor in dem entsprechenden Koefficienten des Zählers vorkommen, da die Form, die wir dem Integral gegeben haben, bewirkt, dass es in den unendlich fernen Punkten nicht unendlich werden kann. Wir können nämlich annehmen, das s und z in einem solchen Punkt unendlich von derselben Ordnung werden (etwas, das sich jedenfalls durch eine Drehung des Koordinatensystemes erreichen lässt); setzen wir dann

$$z = \frac{1}{u}; \quad s = \frac{1}{v},$$

so werden sowohl Zähler wie Nenner für unendlich kleine u unendlich klein von der Ordnung $n-1$; der Bruch wird also endlich.

Wir haben gesehen, das alle Integrale (β), abgesehen von solchen Teilen, die unter die Integrale (α) gehören, sich linear aus $n-1$ speciellen Integralen zusammensetzen lassen. Da diese alle in den Doppelpunkten und Spitzen der Kurve endlich bleiben, so gelten die gefundenen Resultate auch, wenn $F = 0$ Grundpunkte in einem oder mehreren von diesen Punkten erhält.

Für ein Normalintegral muss der Bruch V sich so verkürzen lassen, dass der Nenner vom zweiten Grade wird und S die in (2) angegebene Form annimmt.

Beisp. Wir wollen eine Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt nehmen, z. B.

$$s^2 = z(1-z)(1-\lambda z).$$

Sie ist vom Geschlecht 1 und hat deshalb nur ein Integral erster Gattung; dieses ist das von *Riemann* als Normalform für die elliptischen Integrale eingeführte

$$\int \frac{dz}{s}.$$

Digitized by Google

Die bewegliche Kurve ist eine Gerade; als Ausgangslage nehmen wir die unendlich ferne Gerade, welche die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten schneidet, so dass alle drei Kurvenstücke bei $z = \infty$ beginnen. *Abels* Satz sagt dann, dass die Summe der Werte des Integrals Null wird, wenn es von ∞ bis an drei beliebige Punkte auf der Kurve genommen wird, wenn nur die drei Punkte auf einer Geraden liegen und die Wege solche sind, wie sie durch stetige Bewegung der Geraden bestimmt werden.

KAPITEL VI.

ADDITIONSTHEOREME.

KURVEN VOM GESCHLECHTE 1.

44. Auf einer Kurve von der Ordnung n und dem Geschlecht 1 erhielten wir beim Durchschnitt mit einer veränderlichen Kurve von der Ordnung $n-2$, die durch die Doppelpunkte und Spitzen der festen Kurve und durch eine gewisse Anzahl ihrer übrigen Punkte ging, drei bewegliche Schnittpunkte. Diese werden durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt, die in ihren Koefficienten zwei Parameter enthält, von denen die Lage der beweglichen Kurve abhängig ist. Man kan deshalb zwei von den drei Punkten beliebig wählen, und diese bestimmen dann eindeutig den dritten Punkt.

Wählen wir die beiden Punkte so, dass sie zusammenfallen, so haben wir noch über eine Grösse zu disponieren; bestimmen wir diese so, dass alle drei Punkte zusammenfallen, so erhalten wir eine Lage der beweglichen Kurve, die wir zur Ausgangslage nehmen wollen; die Integrale auf den drei Kurvenstücken erhalten dann dieselbe untere Grenze; wenn diese am Integralzeichen auf gewöhnliche Art als ein Wert von z bezeichnet wird, so haben wir zugleich zu beachten, dass diesem ein bestimmter Wert von s entspricht. Wir setzen zugleich voraus,

Digitized by Google

dass die Kurve so von der Ausgangslage in die Endlage übergeht, wie es durch eine stetige Variation derjenigen Parameter, die in der Gleichung enthalten sind, bestimmt wird; diese Variation kann jedoch auf unendlich viele Arten vor sich gehen. Sind die Lagen der Punkte schliesslich (z_1, s_1), (z_2, s_2) und (z_3, s_3), so geben wir als obere Grenzen z_1, z_2 und z_3 an, haben dann aber auch hier zu beachten, dass jedem z ein bestimmtes s entspricht, oder, was dasselbe ist, dass z als ein Punkt der Riemannschen z-Fläche zu betrachten ist. Auf diese Weise wird das Integral eine Funktion der oberen Grenze z_i, die wir durch $u_i = \psi(z_i)$ bezeichnen wollen.

Aus *Abels* Satz folgt nun für ein Integral erster Gattung

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) + \psi(z_3) = 0. \tag{1}$$

Durch eine veränderte stetige Variation der Parameter können zu den einzelnen Gliedern dieser Gleichung Periodicitätsmoduln hinzukommen, aber das muss immer auf solche Art geschehen, dass die Gleichung ihre Gültigkeit behält, denn in unserem Beweise für *Abels* Satz erhielten wir $V = 0$ für jede Lage von F.

45. Die drei Werte von z werden durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt; wenn wir in dieser die Koefficienten durch die Wurzeln ausdrücken, so erhalten wir drei Gleichungen, aus denen wir zwei Parameter eliminiren können; wir erhalten dadurch eine Gleichung zwischen z_1, z_2 und z_3, die symmetrisch ist in Bezug auf diese Grössen und die unter algebraischer rationaler Form die Bedingung dafür ausdrückt, dass der Gleichung (1) genügt ist. Setzt man in diese Gleichung für z_3 die untere Grenze der Integrale ein, so erhält man die algebraische Relation zwischen z_1 und z_2, der genügt werden muss, damit $\psi(z_1) = -\psi(z_2)$. Wir hätten deshalb unsere transcendente Gleichung ebenso gut

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) = \psi(z_3) \tag{2}$$

schreiben können, aber die algebraische Bedingungsgleichung nimmt dann eine andere, in der Regel nicht symmetrische Form an.


Digitized by Google

Da nur eine Bedingungsgleichung vorhanden ist, so lassen sich z_1 und z_2 unabhängig von einander wählen und deshalb als zwei unabhängig Variable betrachten; z_3 wird dann aus der Bedingungsgleichung bestimmt, aber diese wird in der Regel von höherem Grade sein und daher eine mehrdeutige Bestimmung von z_3 liefern; will mann eine eindeutige Bestimmung haben, so muss man auch die Werte von s benutzen und erhält dann Gleichungen von der Form

$$(3) \qquad z_3 = f_1(z_1, s_1, z_2, s_2); \quad s_3 = f_2(z_1, s_1, z_2, s_2),$$

wo f_1 und f_2 rationale Funktionen der vier Koordinaten sind.

Wie aus (2) hervorgeht, kann man die Summe von *zwei* Funktionen ψ (und deshalb auch von einer beliebigen Anzahl) durch *eine* Funktion ψ mit Hülfe einer algebraischen Gleichung ausdrücken; man sagt, dass Funktionen, die diese Eigenschaft besitzen, *ein algebraisches Additionstheorem* haben. Einige Autoren sagen dies von den umgekehrten Funktionen; ist $z_i = \varphi(u_i)$, so erhält man $z_3 = \varphi(u_3) = \varphi(u_1 + u_2)$. Sie sagen dann, dass eine Funktion $\varphi(u)$ ein algebraisches Additionstheorem hat, wenn zwischen $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ und $\varphi(u_1 + u_2)$ eine algebraische Gleichung mit konstanten Koefficienten existiert. Für unter (β) gehörige Integrale zweiter und dritter Gattung auf Kurven vom Geschlecht 1 liefert *Abels* Satz auch ein Additionstheorem, aber hier wird durch Addition der beiden Funktionen das Resultat *eine* Funktion derselben Art, nebst algebraischen und logarithmischen Gliedern; deshalb rechnen wir diese Theoreme nicht unter die eigentlichen Additionstheoreme. Hiervon sind jedoch solche Normalintegrale ausgenommen, deren beide Unendlichkeitspunkte denselben Wert von λ bestimmen. Für unter (α) gehörige Integrale dritter Gattung erhalten wir keine Additionstheoreme; denn da F nicht feste Punkte in allen Doppelpunkten haben darf, so lässt sich die Anzahl von beweglichen Punkten bis auf drei, von denen zwei beliebig sind, nur in dem Falle vermindern, wo die Kurve von dritter Ordnung ist, und in diesem Falle existiert kein Integral (α) dritter Gattung.

Wir wollen nun einige Beispiele betrachten, die sich auf Kurven vom Geschlechte 0 und 1 beziehen.

Digitized by Google

Beisp. 1. Die Kurve hat die Gleichung $sz = 1$; sie ist vom Geschlechte Null, und deshalb giebt es keine Bedingungsgleichung, so dass die beiden beweglichen Punkte beliebig gewählt werden können. Lassen wir s die Funktion unter dem Integralzeichen sein, so erhalten wir das Additionstheorem für den Logarithmus. Das Integral ist hier von dritter Gattung, und seine Unendlichkeitspunkte liegen auf der unendlich fernen Geraden.

Beisp. 2. $s(1 + z^2) = 1$. Die Kurve ist vom Geschlechte Null, da sie einen unendlich fernen Doppelpunkt hat. Wir schneiden mit der Geraden $s = \alpha z + \beta$ und erhalten

$$\alpha z^3 + \beta z^2 + \alpha z + \beta - 1 = 0; \quad z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1.$$

Ist die Funktion unter dem Integralzeichen s, so wird sie nur unendlich im Doppelpunkte, und wir erhalten, da $S = 0$ und $Z = 0$ keine gleichen Wurzeln haben,

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) + \psi \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 + z_2} = 0.$$

Die Funktion ist etwas verschieden von $\operatorname{arc\,tg} z$. Um eine gemeinschaftliche untere Grenze für die drei Integrale zu erhalten, müssen wir die Gerade als Tangente in einem Wendepunkte beginnen lassen; nun werden die Wendepunkte bestimmt durch $3z^2 = 1$. Die Funktion ist demnach $\operatorname{arctg} z - \frac{\pi}{6}$.

Beisp. 3. $z^2 + s^2 = 1$. $s = \alpha z + \lambda$. Die Funktion unter dem Integralzeichen sei $\frac{1}{s}$.

Wir erteilen α einen beliebigen konstanten Wert, jedoch nicht $\pm i$. Das Integral wird unendlich in den beiden Punkten ∞; diese liegen beide auf der durch $\lambda = \infty$ bestimmten unendlich fernen Geraden, und die Integralsumme in *Abels* Satz ist deshalb Null; wir legen die Anfangsgerade durch die Punkte (0, 1) und (z_3, s_3), die Endgerade durch (z_1, s_1) und (z_2, s_2), und das eine Integral geht dann von 0 bis z_1, das andere von z_3 bis z_2; das letztere wird in eine Differenz zwischen zwei Integralen, die in 0 beginnen, umgeformt, und wir erhalten dann

$$\arcsin z_1 + \arcsin z_2 = \arcsin z_3.$$

Digitized by Google

Die Bedingungsgleichung erhält man nun, wenn man den Parallelismus der beiden Geraden berücksichtigt; wir erhalten, da die erste Gerade durch $\lambda = 1$ bestimmt wird,

$$z_3 = \frac{-2\alpha}{1+\alpha^2}; \quad s_3 = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}; \quad \alpha = \frac{s_1 - s_2}{z_1 - z_2};$$

hieraus ergiebt sich nach einigen Reduktionen mit Hülfe der Gleichung des Kreises:

$$z_3 = z_1 s_2 + s_1 z_2; \quad s_3 = s_1 s_2 - z_1 z_2,$$

und diese Gleichungen stimmen, wenn

$$z_3 = \sin u_3; \quad s_3 = \cos u_3; \quad s_1 = \cos u_1, \text{ u. s. w.}$$

zu den aus der Trigonometrie her bekannten Formeln. Bilden wir die quadratische Gleichung in z, zo erhalten wir

$$(1+\alpha^2) z_3 = -2\alpha; \quad (1+\alpha^2)(z_1 + z_2) = -2\alpha\lambda;$$
$$(1+\alpha^2) z_1 z_2 = \lambda^2 - 1,$$

woraus durch Elimination von α und λ

$$4 z_1^2 z_2^2 z_3^2 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 - 2 z_1^2 z_2^2 - 2 z_2^2 z_3^2 - 2 z_3^2 z_1^2 = 0,$$

und auf analoge Weise

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2 s_1 s_2 s_3 = 1;$$

diese Gleichungen drücken bekannte Relationen aus zwischen den Sinus und Cosinus von drei Winkeln, von denen der eine gleich der Summe der beiden anderen.

Beisp. 4. $s^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2); \quad s = 1 + az + bz^2.$

Die zweite Kurve ist von zweiter Ordnung und so bestimmt, dass sie durch beide Doppelpunkte der ersten geht (sie in dem unendlich fernen Selbstberührungspunkt berührt), sowie durch den Punkt (0, 1); die beiden Kurven haben deshalb drei bewegliche Schnittpunkte; diese fallen für $a = 0$, $2b = -(1+k^2)$ sämtlich in den Punkt (0, 1), welcher Anfangspunkt für das zu

Digitized by Google

der festen Kurve gehörige elliptische Integral erster Art ist. Wir erhalten

$$(b^2-k^2)z^3+2abz^2+(a^2+2b+1+k^2)z+2a=0.$$

Drückt man die Koefficienten durch die Wurzeln aus und eliminiert a und b, so erhält man

$$k^4z_1^4z_2^4z_3^4-2k^2z_1^2z_2^2z_3^2(z_1^2+z_2^2+z_3^2-2)+4z_1^2z_2^2z_3^2+z^4+z_2^4+z_3^4$$
$$-2z_1^2z_2^2-2z_2^2z_3^2-2z_3^2z^2=0.$$

Die eindeutigen Ausdrücke für z_3 und s_3 mittels der Koordinaten der beiden anderen Punkte können, da Relationen zwischen diesen existieren, verschiedene Formen erhalten; die gewöhnlich angewandte Form lässt sich auf folgende Weise finden.

Wenn man die Koordinaten der beiden Punkte in beide Gleichungen einsetzt, so erhält man

$$z_1s_2-s_1z_2=(z_1-z_2)(1-bz_1z_2);\; z_1^2s_2^2-s^2z_2^2=(z_1^2-z_2^2)(1-k^2z_1^2z_2^2);$$

da

$$bz_1z_2z_3=z_1+z_2+z_3,$$

so folgt hieraus

$$-z_3=\frac{z_1+z_2}{1-bz_1z_2}=\frac{z_1^2-z_2^2}{(z_1-z_2)(1-bz_1z_2)}=\frac{z_1s_2+s_1z_2}{1-k^2z_1^2z_2^2}.$$

Bestimmt man auf ähnliche Weise s_3, und benutzt man die Formel von Seite 90, so findet man

$$\int_0^{z_1}\frac{dz}{\triangle(z,k)}+\int_0^{z_2}\frac{dz}{\triangle(z,k)}=\int_0^{z_3}\frac{dz}{\triangle(z,k)},$$

wenn

$$z_3=\frac{z_1s_2+z_2s_1}{1-k^2z_1^2z_2^2};\; s_3=\frac{s_1s_2-z_1z_2}{1-k^2z_1^2z_2^2}.$$

Beisp. 5. $s^2=4z^3-g_2z-g_3$. $s=az+b$.

Die unendlich ferne Gerade schneidet die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten und kann deshalb als Ausgangsgerade benutzt werden.

Digitized by Google

Weierstrass hat

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{s}; \; z = p(u); \; s = p'(u)$$

als Normalform für das elliptische Integral erster Art eingeführt. Man erhält

$$4z^3 - a^2z^2 - (g_2 + 2ab)z - (g_3 + b^2) = 0.$$

Durch Elimination von a und b wird die symmetrische Gleichung zwischen z_1, z_2 und z_3 gebildet. Einen eindeutigen Ausdruck für z_3 erhält man aus

$$z_1 + z_2 + z_3 = \tfrac{1}{4}a^2, \text{ und } a = \frac{s_1 - s_2}{z_1 - z_2}.$$

Man hat also

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

wenn

$$z_3 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{s_1 - s_2}{z_1 - z_2}\right)^2 - z_1 - z_2.$$

Es ist wohl zu beachten, dass die bei Kurven vom Geschlechte 1 zwischen den Koordinaten der drei Punkte gebildeten Gleichungen nicht von den auf der Kurve genommenen Integralen abhängig sind. Ein Additionstheorem, das für ein Integral von erster Art gefunden ist, wird deshalb ebensowohl für Integrale von zweiter und dritter Art gelten, wenn gewisse algebraische und logarithmische Glieder hinzugefügt werden.

Beisp. 6. $(s^2 + z^2)^2 = 2a^2(z^2 - s^2); \; s^2 + z^2 = \lambda(s + z).$

Die Kurve ist vom Geschlechte Null. Der Kreis ist durch die drei Doppelpunkte gelegt und berührt in dem einen Punkte (0,0). Man findet

$$z = \frac{2a^2\lambda(2a^2 + \lambda^2)}{4a^4 + \lambda^4}; \; s = \frac{2a^2\lambda(2a^2 - \lambda^2)}{4a^4 + \lambda^4}.$$

Alle Integrale auf der Kurve werden algebraisch durch diese Ausdrücke und durch Logarithmen ausgedrückt.

Digitized by Google

KURVEN VON HÖHEREM GESCHLECHT.

46. Wenn wir *Abels* Theorem auf Integrale erster Gattung, die zu Kurven vom Geschlechte p gehören, anwenden, so erhalten wir eine Summe von $p+1$ Integralen, die gleich Null ist. Die Gleichung $Z=0$ (oder die Gleichung $S=0$) wird auf eine Gleichung vom Grade $p+1$ reduciert, aber da die Koefficienten dieser Gleichung nur einen Parameter enthalten, so können wir nur *einen* von den $p+1$ Punkten beliebig wählen; ist dieser gewählt, so ist der Parameter, und damit die p übrigen Punkte, bestimmt. Nehmen wir die Gleichung von höherem Grade, indem wir mehrere von den Schnittpunkten unbestimmt sein lassen, so haben wir über eine grössere Zahl von Parametern zu disponieren, aber in allen Fällen werden p Punkte durch die übrigen bestimmt werden. So können wir für Kurven vom Geschlechte 2 allerdings eine Gleichung in z vom dritten Grade erhalten, aber in ihren Koefficienten kommt nur *ein* Parameter vor, so dass zwei von den beweglichen Schnittpunkten bestimmt sind, wenn der dritte beliebig gewählt ist.

Bei Kurven vom Geschlechte Null (unikursalen Kurven) erhielten wir Gleichungen ersten Grades, so dass die Koordinaten des beweglichen Punktes rational durch einen Parameter ausgedrückt wurden; dabei haben wir drei Gleichungen von der Form

$$s=f_1(\lambda);\quad z=f_2(\lambda);\quad \lambda=f_3(z,s), \tag{4}$$

wo f_1, f_2 und f_3 rationale Funktionen bedeuten. Lassen wir λ die Punkte auf einer Geraden darstellen, so erhalten wir dadurch eine ein-eindeutige Verbindung zwischen den Punkten der unikursalen Kurve und der Geraden. Wenn λ die Gerade von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so durchläuft (z, s) die Kurve einmal; zwei Zweige durch einen Doppelpunkt werden jeder für sich beschrieben; der Doppelpunkt wird deshalb am besten so aufgefasst, als ob er aus zwei verschiedenen Punkten zusammengesetzt wäre, von denen jeder einem besonderen Punkte der Geraden entspricht. Hieraus folgt, dass f_3 für einen Doppel-

Digitized by Google

punkt unbestimmte Form annehmen muss. Beisp. 6 kann dazu dienen diese Bemerkungen zu illustrieren.

Bei Kurven vom Geschlechte 1 erhielten wir Gleichungen zweiten Grades für die Bestimmung der möglichst kleinen Anzahl beweglicher Schnittpunkte; hier wird deshalb jeder Wert von λ ein Punktepaar bestimmen; die beiden Punkte eines Paares fallen zusammen für diejenigen Werte von λ, die der quadratischen Gleichung gleiche Wurzeln verleihen, und die diejenigen Kurven des Büschels bestimmen, welche $f=0$ berühren. Die Gleichung $\lambda = f_3$ wird wie früher rational mit unbestimmter Form für die Doppelpunkte und die übrigen Grundpunkte des Büschels, während f_1 und f_2 eine Quadratwurzel enthalten, die in beiden mit demselben Werte zu nehmen ist.

Man kann indessen auch hier die Koordinaten der Kurvenpunkte eindeutig durch einen Parameter ausdrücken; die Abhängigkeit wird dann aber nicht algebraisch. *Einem* Punkte der Geraden entspricht *ein* Punkt der Kurve, aber *einem* Punkte der Kurve entsprechen unendlich viele Punkte der Geraden. Zu diesem Resultat gelangen wir, wenn riw das zur Kurve gehörende Integral erster Gattung benutzen. Dieses, früher von uns mit u bezeichnet, besitzt zwei Periodicitätsmoduln, die bei der konformen Abbildung auf der u-Ebene ein Periodenparallelogramm bestimmen; da alle Periodenparallelogramme die u-Ebene einmal decken, so wird z eine in der ganzen Ebene eindeutige doppelperiodische Funktion von u, die wir mit $z(u)$ bezeichnen wollen. Auf ähnliche Weise sieht man, das dasselbe für s gilt; wir haben also

$$z = z(u); \quad s = s(u), \tag{5}$$

woraus sich, wenn u jetzt zum Parameter genommen wird, eindeutige Ausdrücke für z und s ergeben. Da u durch z und s jedoch nur abgesehen von Periodicitätsmoduln bestimmt ist, so entsprechen einem Punkte der Kurve unendlich viele Punkte der von u durchlaufenen Geraden.

Als Beispiel können wir die Kurve

$$s^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

Digitized by Google

betrachten, bei der wir haben:

$$z = p(u); \quad s = p'(u).$$

47. Ist die Kurve vom Geschlecht 2, so können wir eine Gleichung dritten Grades bilden, deren Koefficienten nur einen Parameter enthalten; lassen wir diesen eine Gerade durchlaufen, so entspricht jedem Punkte der Geraden ein Punkttripel auf der Kurve, während *einem* Punkte auf der Kurve nur *ein* Punkt auf der Geraden entspricht. Wir können einen Punkt eines Tripels beliebig wählen, dadurch sind dann aber die beiden anderen Punkte bestimmt; wir können auch mehrere von den Schnittpunkten beweglich sein lassen, aber in allen Fällen werden zwei von den Punkten von den übrigen bestimmt werden; die Bestimmung geschieht durch zwei algebraische Gleichungen, die wir erhalten, wenn wir die Koefficienten der Gleichung durch die Wurzeln ausdrücken und die Parameter eliminieren. Die Bestimmung kann jedoch auch durch zwei transcendente Gleichungen erfolgen, die wir erhalten, wenn wir *Abels* Satz auf die beiden zur Kurve gehörigen Integrale erster Gattung anwenden. Wir wollen beispielsweise annehmen, wir hätten eine Kurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Der bewegliche Kegelschnitt geht durch diesen und schneidet die Kurve in 6 anderen Punkten; einen von diesen legen wir fest und gewinnen dadurch *eine* Grösse, über die wir disponieren können. Von den übrigen können wir drei beliebig wählen; wir lassen sie in einen Punkt zusammenfallen, über den wir auch nach Belieben disponieren können; wir können dann derartig über die zwei übrigen Punkte disponieren, dass sie mit den obengenannten drei zusammenfallen. Dadurch erhalten wir einen gemeinsamen Ausgangspunkt für die fünf beweglichen Schnittpunkte, und nehmen diesen als gemeinsame untere Grenze für die Integrale. Bezeichnen wir diese als Funktionen der oberen Grenze, indem wir wie gewöhnlich die den Koordinaten z entsprechenden Werte von s mit einbegreifen, so erhalten wir zwei Gleichungen von der Form

$$(6) \qquad \begin{aligned} \psi_1(z_1) + \psi_1(z_2) + \psi_1(z_3) + \psi_1(z_4) + \psi_1(z_5) = 0; \\ \psi_2(z_1) + \psi_2(z_2) + \psi_2(z_3) + \psi_2(z_4) + \psi_2(z_5) = 0, \end{aligned}$$



bei denen zwischen den 5 Werten von z zwei algebraische Bedingungsgleichungen existieren. Diese können durch Gleichungen ersetzt werden, welche $z_4 + z_5$, $z_4 z_5$, $s_4 + s_5$ und $s_4 s_5$ rational durch die Koordinaten der drei übrigen Punkte ausdrücken.

Auf diese Weise haben wir eine Art von Additionstheorem, da eine Summe von drei oder mehr Funktionen ψ sich auf die negative Summe zweier solche Funktionen mit Hülfe der algebraischen Gleichungen reducieren lässt; wie früher schon angegeben rechnen wir jedoch diese Theoreme nicht unter die eigentlichen Additionstheoreme. Einer Funktion ψ entspricht nämlich keine eindeutige umgekehrte Funktion, denn *Jacoby* hat gezeigt, dass man für eine Funktion mit mehr als zwei Periodicitätsmoduln die Wege so wählen kann, dass man einen gegebenen Wert von u für einen beliebigen Wert von z erhält.

Ist das Geschlecht 2, so giebt es 4 Periodicitätsmoduln, und ein Blatt der *Riemann*schen z-Fläche wird auf der u-Ebene als eine achtseitige Figur abgebildet, deren Seiten paarweise parallel und gleich sind; fügt man nun die Bilder der übrigen Blätter als kongruente achtseitige Figuren hierzu, so wird die u-Ebene unendlich viele Male überdeckt. In besonderen Fällen kann die u-Ebene jedoch eine endliche Anzahl Male überdeckt werden, nämlich wenn die umgekehrte Funktion eine algebraische Funktion einer doppelperiodischen Funktion ist. Angenommen, es sei z. B.

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)(1-l^2 z^2)}};$$

hier sind 6 Verzweigungspunkte, und wir haben früher gezeigt, dass wir in diesem Falle 4 Querschnitte nötig haben, um die Fläche einmal zusammenhängend zu machen, so dass scheinbar 4 Periodicitätsmoduln da sind. Durch die Substitution $z^2 = v$ finden wir indessen, dass z^2 eine doppelperiodische Funktion von u ist. Die achtseitige Figur besteht deshalb aus zwei kongruenten Parallelogrammen, die sich decken.

Digitized by Google

Die für Kurven vom Geschlechte 2 angestellten Betrachtungen lassen sich leicht auf Kurven von höherem Geschlecht übertragen.

48. Nachdem wir eine Klasse von *Abel*schen Funktionen gefunden haben, die Additionstheoreme besitzen, erhebt sich naturgemäss die Frage, ob es nicht andere Transcendenten giebt, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Wir wollen deshalb annehmen, wir besässen eine solche Transcendente ψ, und wollen sie genauer untersuchen.

Wir setzen also voraus, dass

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) + \psi(z_3) = 0, \tag{7}$$

wenn zwischen z_1, z_2 und z_3 eine algebraische Gleichung $\varphi = 0$ existiert.

Nehmen wir z_1 und z_2 als unabhängige Variable so erhalten wir

$$\psi'(z_1) + \psi'(z_3)\frac{\partial z_3}{\partial z_1} = 0; \quad \psi'(z_2) + \psi'(z_3)\frac{\partial z_3}{\partial z_2} = 0. \tag{8}$$

Aus $\varphi = 0$ ergeben sich die partiellen Differentialquotienten von z_3 als algebraische Funktionen von z_1 und z_2; diese werden in die Gleichung (8) eingesetzt, und wir finden, dass das Verhältnis zwischen $\psi'(z_1)$ und $\psi'(z_2)$ eine algebraische Funktion von z_1 und z_2 ist. Dass kan jedoch, da z_1 und z_2 von einander unabhängig sind, nur stattfinden, wenn $\psi'(z)$ eine algebraische Funktion von z ist. Also:

Hat die Funktion ψ ein Additionstheorem, so muss sie ein Abelsches Integral sein.

49. Die Gleichungen

$$\frac{\partial z_3}{\partial z_1} = -\psi'(z_1):\psi'(z_3); \quad \frac{\partial z_3}{\partial z_2} = -\psi'(z_2):\psi'(z_3) \tag{9}$$

bringen eine bemerkenswerte Eigenschaft der Funktion z_3 zur Anschauung, nämlich die, dass das Verhältnis zwischen ihren partiellen Abgeleiteten gleich dem Verhältnis zwischen zwei Funktionen ist, die jede nur die eine Variable enthalten. Hat man andererseits eine Funktion mit den durch die Gleichungen

Digitized by Google

(9) und (8) ausgedrückten Eigenschaften gefunden, so muss diese zu einem Additionstheorem führen, da man von den beiden Gleichungen (8) durch Integration zu (7) gelangt. So giebt die Gleichung $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3$, die wir um die Elimination von z_2 zu vermeiden, unter der Form

$$-z_2 = \frac{z_1 + z_3}{1 - z_1 z_3}$$

schreiben wollen, durch Differentiation mit Bezug auf z_1:

$$\frac{\partial z_3}{\partial z_1} = \frac{1}{1 + z_1^2} : \frac{-1}{1 + z_3^2},$$

mithin

$$\psi'(z) = \frac{1}{1 + z^2}; \; \psi = \text{arc tg}.$$

50. Betrachten wir z_3 als einen Parameter, z_1 und z_2 als rechtwinkelige Koordinaten, so repräsentiert die algebraische Gleichung $\varphi = 0$ ein Kurvensystem. Wir wollen dessen Enveloppe suchen; denken wir uns die Gleichung mit Bezug auf z_3 gelöst, so haben wir zu setzen

$$\frac{\partial z_3}{\partial z_1} = \infty \text{ und } \frac{\partial z_3}{\partial z_2} = \infty \text{ oder } \psi'(z_1) = \infty; \; \psi'(z_2) = \infty.$$

Diese Gleichungen bestimmen nur konstante Werte der Koordinaten, so dass die Enveloppe zusammengesetzt sein muss aus Geraden, die den Axen parallel sind. So wird die früher gefundene Gleichung

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2 s_1 s_2 s_3 = 1$$

mit der angeführten Auffassung (S. 106) einem System von Kegelschnitten angehören, dessen Enveloppe aus den vier Geraden $s_1 = \pm 1$ und $s_2 = \pm 1$ zusammengesetzt ist. Dass wir hier die Gleichung zwischen den Koordinaten s benutzt haben, ist natürlich gleichgültig.

Wir sehen also, dass die Aufgabe von der Bestimmung der Additionstheoreme sich auch (etwas allgemeiner) unter der folgenden bemerkenswerten Form stellen lässt:

Digitized by Google

Alle diejenigen algebraischen Kurvensysteme zu bestimmen, deren Enveloppe aus Geraden, die den Axen parallel sind, zusammengesetzt ist.

Wenn wir z_3 als konstant betrachten, so erhalten wir eine Relation zwischen z_1 und z_2, die durch die algebraische Differentialgleichung

$$\psi'(z_1)dz_1 + \psi'(z_2)dz_2 = 0 \tag{10}$$

bestimmt wird; diese Gleichung lässt sich direkt unter transcendenter Form integrieren, sie hat aber auch das algebraische Integral $\varphi = 0$. Die Gleichung muss deshalb auch einen nicht konstanten algebraischen Integrationsfaktor besitzen.

Wir wollen umgekehrt annehmen, dass eine solche Differentialgleichung mit den Integralen

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) = C \text{ und } f(z_1, z_2) = c$$

gegeben sei, wo f algebraisch ist. Dann hat man wie bekannt identisch

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) = \varphi(f(z_1, z_2)), \tag{11}$$

wo φ eine unbekannte Funktion bedeutet. Das algebraische Integral lässt sich auf unendlich viele Arten schreiben, da wir für c eine Funktion von c setzen können; wir wollen annehmen, wir hätten eine solche Form gewählt, dass f zu z_1 wird, wenn wir für z_2 einen Wert einsetzen, der $\psi(z_2)$ zu Null macht; wir erhalten dann, wenn dieser Wert in (11) eingesetzt wird, identisch

$$\varphi(z) = \psi(z),$$

und deshalb

$$\psi(z_1) + \psi(z_2) = \psi(z_3), \text{ wenn } z_3 = f(z_1, z_2),$$

wodurch das Additionstheorem der Funktion ausgedrückt wird. Dadurch erhalten wir für die Aufgabe die neue Form:

Alle die algebraischen Differentialgleichungen von der Form (10) zu finden, die ein allgemeines algebraisches Integral besitzen, während die Glied für Glied vorgenommene Integration Transcendenten liefert.

Das Additionstheorem für das erste elliptische Integral ist zuerst auf diesem Wege von *Euler* gefunden worden.

Digitized by Google

52. Wir haben gesehen, das diejenigen Funktionen, welche Additionstheoreme besitzen, *Abelsche* Integrale sind, und als solche müssen sie zu gewissen Kurven gehören. Mit Hülfe dieser erhalten wir eine nähere Bestimmung der Funktionen, wenn wir Rücksicht nehmen auf beide Koordinaten und auf die durchlaufenen Wege. Dadurch werden wir dahin gebracht, unsere Aufgabe etwas zu begrenzen.

Setzen wir

$$z = \varphi(x),$$

wo φ eine algebraische Funktion bedeutet, und

$$\psi\varphi(x) = \theta(x),$$

so geht eine algebraische Gleichung zwischen z_1, z_2 und z_3 über in eine solche zwischen x_1, x_2 und x_3, und das Additionstheorem für ψ geht über in ein Additionstheorem für θ. War nun das erste Additionstheorem aus *Abels* Satz abgeleitet, so bestimmen zwei Punkte (z, s) eindeutig den dritten; das gilt jedoch nicht allgemein für die Punkte (x, s). Um diese algebraischen Transformationen eines gegebenen Additionstheorems auszuschliessen, wollen wir deshalb die Forderung stellen, dass die Bestimmung des dritten Punktes durch die beiden anderen eindeutig sein soll, so dass wir haben

$$z_3 = f_1(z_1, s_1, z_2, s_2); \quad s_3 = f_2(z_1, s_1, z_2, s_2), \tag{12}$$

wo f_1 und f_2 rationale Funktionen bedeuten. Die Additionsgleichung denken wir uns hier unter der Form

$$u_1 + u_2 = u_3; \tag{13}$$

wir können dann nicht, wie es bei Benutzung der symmetrischen Form möglich war, die Koordinaten der drei Punkte in den Gleichungen (12) vertauschen, aber aus diesen können wir die Gleichungen

$$z_2 = f_3(z_1, s_1, z_3, s_3); \quad s_2 = f_4(z_1, s_1, z_3, s_3) \tag{14}$$

ableiten, wo f_3 und f_4 rationale Funktionen sind und z_1 und s_1 mit z_2 und s_2 vertauscht werden können.

Die Gleichungen (12) können wir als Transformationsgleichungen betrachten, welche die Kurve in sich selbst über-

Digitized by Google

führen, und zwar auf unendlich viele Arten; halten wir nämlich den Kurvenpunkt (z_1, s_1) fest, so transformieren die Gleichungen jeden Kurvenpunkt (z_2, s_2) in einen anderen (z_3, s_3). Variiert der feste Punkt, so erhälten wir neue Transformationen, oder, wie es ausgedrückt wird, die Kurve kann in sich selbst übergeführt werden durch eine *Schaar* von rationalen und eindeutig umkehrbaren Transformationen. Der feste Punkt, der ja nur *eine* variable Grösse darstellt, spielt dadurch die Rolle eines Parameters. Für diesen lässt sich eine Bezeichnung α einführen, aber α wird dann in der Regel nicht rational in die Transformationsgleichungen eintreten.

Alle Transformationen bilden eine Gruppe; angenommen nämlich, wir transformierten mit dem Punkte 1 (die Bezeichnung erklärt sich leicht) als Parameter 2 in 3, und dann mit 5 als Parameter 3 in 4; dann haben wir, wenn wir der Kürze wegen die Bezeichnung u_i für das Integral mit der oberen Grenze im Punkte (z_i, s_i) benutzen,

$$u_1 + u_2 = u_3; \quad u_5 + u_3 = u_4,$$

woraus

$$u_1 + u_5 + u_2 = u_4, \text{ oder } u_6 + u_2 = u_4,$$

wenn u_6 die Summe von u_1 und u_5 bezeichnet. Wir haben also die beiden auf einander folgenden Transformationen durch eine derselben Art ersetzt, und diese Eigenschaft der Transformationen wollen wir eben bezeichnen, wenn wir sagen, dass sie eine Gruppe bilden.

Bei den obengenannten Gleichungen müssen wir festhalten, dass die Additionen und Subtraktionen mit Hülfe der Transformationsgleichungen (12) und (14) ausgeführt werden, also eindeutige Operationen sind. Ist die Kurve vom Geschlecht 1, so können wir die Buchstaben u die Werte der entsprechenden Integrale bezeichnen lassen, da ein solcher Wert den Endpunkt eines Integrals eindeutig bestimmt; anders aber verhält es sich mit Kurven vom höherem Geschlecht, bei denen einem gegebenen Werte von u unendlich viele Werte von (z, s) entsprechen.

Wählen wir den gemeinsamen Anfangspunkt der Integrale

Digitized by Google

zum Parameterpunkt, so erhalten wir $u_1 = 0$, also $u_2 = u_3$, so dass alle Punkte bei der Transformation unverändert bleiben. Eine solche Transformation nennen wir *identisch*, und den entsprechenden Wert von α können wir gleich Null setzen. Für einen unendlich kleinen Wert von α haben wir dann das, was *Lie* die unendlich kleine Transformation der Gruppe nennt; diese verlegt auf Grund der Stetigkeit alle Punkte der Kurve unendlich wenig.

Eine Transformation ist vollkommen bestimmt, wenn wir wissen, dass sie einen gegebenen Punkt an einen anderen gegebenen Punkt verlegt, denn die beiden Punkte bestimmen den Parameterpunkt und dadurch die Transformation eindeutig.

53. Es sei $z = a$ die gemeinsame untere Grenze für die Integrale; die Gleichung (13) können wir dann unter der Form

$$\int_a^{z_2} \psi'(z)\, dz = \int_{z_1}^{z_3} \psi'(z)\, dz$$

schreiben; diese Gleichung muss also gelten, wenn die Koordinaten der Grenzpunkte die Bedingungen (12) erfüllen. Nun wollen wir, indem wir z_1 und s_1 als Konstanten auffassen, die Substitution $z = f_3$ auf das erste Integral anwenden; dieses geht dann über in ein neues Integral mit den Grenzen z_1 und z_3, denn einem $z_3 = z_2$ entspricht $z_1 = a$ ((13)). Der Ausdruck unter dem Integralzeichen geht, wenn wir die Bezeichnung z für die Variable beibehalten, über in ein gewisses Differential $\theta(z)\, dz$; dann haben wir

$$\int_{z_1}^{z_3} \psi'(z)\, dz = \int_{z_1}^{z_3} \theta(z)\, dz,$$

eine Gleichung, die, da die Grenzen beliebige Grössen sind, verlangt, dass $\theta = \psi'$.

Wir sehen also:

Wenn eine Funktion ein Additionstheorem hat, so wird ihr Differential durch eine Schaar algebraischer Transformationen nicht verändert.

Digitized by Google

So erhalten wir, für

$$\frac{dz}{1+z^2} \text{ und } z = \frac{x-a}{1+xa},$$

$$dz = \frac{(1+a^2)dx}{(1+xa)^2};\ 1+x^2 = \frac{(1+a^2)(1+x^2)}{(1+xa)^2};$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{1+x^2},$$

ebenso wie

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

geht über in

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

durch die Substitution

$$z = x\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-x^2}.$$

54. Nachdem wir nun eine Reihe von Eigenschaften an Funktionen mit Additionstheorem kennen gelernt haben, so erhebt sich die Frage, welche von diesen Eigenschaften sich am besten für die nähere Bestimmung der Funktionen verwerten lassen. Die verschiedenartigen Additionstheoreme, die uns *Abels* Theorem für Kurven von verschiedenem Geschlecht geliefert hat, machen es warscheinlich, dass diese Theoreme sich gegenseitig ausschliessen, so dass die eigentlichen Additionstheoreme nur bei Kurven vom Geschlechte 0 oder 1 vorkommen. Da für diese die umgekehrten Funktionen der Integralfunktionen eindeutig sind, während sie für Kurven von höherem Geschlecht nicht eindeutig sein können, so liegt es nahe den Versuch zu machen den Beweis dadurch durchzuführen, dass man zeigt, dass eben die Existenz eines Additionstheorems die Eindeutigkeit der umgekehrten Funktionen mit sich führt. In der That ist es auf diesem Wege *Schwarz*[1]), von den eindeutigen Kurventransformationen ausgehend, gelungen zu beweisen, dass es in Wircklichkeit keine Additions-

---

[1]) Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 87, S. 139; Abhandlungen 2, S. 285.

Digitized by Google

theoreme in der im Vorhergehenden angenommenen Bedeutung für Kurven von höherem Geschlechte als 1 giebt. Obgleich wir in unserer Entwickelung alles so zurecht gelegt haben, dass der Beweis sich sehr leicht führen lässt, so müssen wir ihn doch vorläufig übergehen, da er Bekanntschaft voraussetzt mit unendlichen Reihen und Fortsetzung der Funktionen, die erst in den folgenden Kapiteln behandelt werden sollen.

KAPITEL VII.

UNENDLICHE REIHEN UND PRODUKTE.

REIHEN MIT POSITIVEN GLIEDERN.

55. Für Reihen mit positiven Gliedern

$$\Sigma u_n$$

sind wie bekannt $\lim u_n = 0$, und, wenn die Glieder von einer gewissen Stelle an abnehmen, $\lim n u_n = 0$ notwendige, aber nicht ausreichende Konvergenzbedingungen.[1]) Von vollständigeren Kriterien giebt es eine Menge, aber für nahezu alle von ihnen gilt, dass sie sich ergeben, wenn man die Reihe, die untersucht werden soll, mit einer anderen Reihe vergleicht, deren Konvergensverhältnisse man direkt herausgebracht hat. Ist eine solche Reihe Σt_n, und hat man für ein gewisses n und alle grösseren n

$$u_n : u_{n+1} > t_n : t_{n+1},$$

so ist Σu konvergent, wenn Σt es ist; ist dagegen das erste Verhältnis kleiner als das zweite, so ist Σu divergent, wenn Σt es ist.

---

[1]) Die Reihe ist konvergent, wenn man für ein beliebiges p ein solches n finden kann, dass

$$\lim (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots u_{n+p}) = 0.$$


Digitized by Google

Auf diesem Wege sind *Cauchy*, *Duhamel*, *Bertrand*, *de Morgan* und andere zu den gewöhnlich angewandten Konvergenzkriterien gelangt; der Verfasser hat gezeigt (Tidsskrift for Mathematik 1873, S. 49), wie sich alle diese auf einem gemeinsamen Wege ableiten lassen, der ihren inneren Zusammenhang deutlich hervortreten lässt.

Um das zu erreichen, denken wir uns das Verhältniss $u_n : u_{n+1}$ in einer Reihe nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt, so dass wir haben

$$(1) \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} \dots$$

Als Hülfsreihe benutzen wir diejenige, deren allgemeines Glied

$$(2) \qquad t_n = \frac{1}{(n-k)^\mu}$$

ist, wo k eine beliebige ganze, positive, endliche Zahl bedeutet. Wie bekannt lässt sich leicht zeigen, dass diese Reihe konvergent ist für $\mu > 1$, divergent für $\mu \overline{\overline{<}} 1$. Für sie erhält man

$$(3) \qquad \frac{t_n}{t_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} + \dots\right)^\mu = 1 + \frac{\mu}{n} + \dots$$

Bei der Vergleichung der beiden Verhältnisse können wir uns nun damit begnügen, die ersten Glieder ihrer Reihenentwickelungen zu betrachten, da wir uns n so gross denken können, dass jedes Glied im Verhältnis zu dem vorhergehenden verschwindend ist.

1) $\alpha > 1$. Wir nehmen $\mu > 1$, also Σt konvergent. Das erste Verhältnis ist das grössere für hinreichend grosse n, also Σu konvergent.

$\alpha < 1$. Wir nehmen $\mu < 1$. Beide Reihen sind divergent. Mithin:

Ist
$$\alpha = \lim \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1,$$

so ist die Reihe konvergent, während sie für $\alpha < 1$ *divergent ist.* (Satz von *Cauchy*).

Digitized by Google

Man ersieht übrigens aus dem Beweise, dass ein Grenzwert α nicht zu existieren braucht; es genügt, dass der Bruch von einem gewissen n an immer grösser ist als eine Zahl $\alpha > 1$. Eine entsprechende Bemerkung gilt für die folgenden Kriterien.

2) $\alpha = 1$; $\beta > 1$. Wir nehmen $1 < \mu < \beta$. Die Reihen sind konvergent.

$\alpha = 1$; $\beta < 1$. Wir nehmen $1 > \mu > \beta$. Die Reihen sind divergent. Mithin:

Ist

$$\beta = \lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

so ist die Reihe konvergent, während sie für $\beta < 1$ divergent ist. (Satz von *Duhamel* oder *Raabe.*)

3) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, γ endlich. Wir nehmen $\mu = 1$; $k > \gamma$. Die Reihen sind divergent. Mithin:

Ist

$$\gamma = \lim n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$$

endlich, so ist die Reihe divergent.

Erhält man $\gamma = \infty$, so geht daraus hervor, dass die Reihenentwickelung nicht mit einem Gliede fortgesetzt wird, dessen Nenner n^2 ist, sondern mit einem Gliede, bei dem der Grad des Nenners zwischen 1 und 2 liegt. Wir wollen annehmen, der Grad sei $1 + \nu$, wo $0 < \nu < 1$, und der Zähler

$$\gamma_1 = \lim n^{\nu}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse. Hier müssen wir eine neue Reihe zur Vergleichung wählen und nehmen

$$t_n = \frac{1}{n} e^{\frac{\lambda}{\nu} n^{-\nu}},$$

ein Ausdruck, der nicht die Bedingung $\lim n t_n = 0$ erfüllt und deshalb eine divergente Reihe bestimmt. Man findet

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^{1+\nu}} + \ldots$$

Digitized by Google

und wählt $\lambda > \gamma_1$, wodurch beide Reihen divergent werden. Mithin

Kann

$$\lim n^{\nu}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$$

endlich werden für einen positiven, und sei es auch noch so kleinen endlichen Wert von ν, so ist die Reihe divergent.

56. Hiermit ist die Untersuchung jedoch keineswegs abgeschlossen; es kann nämlich Glieder geben, deren Ordnung zwischen 1 und $1+\nu$ fällt, wie klein ν auch sein möge; das ist beispielsweise der Fall mit nln, $nlln$ u. s. w. Bei der Untersuchung solcher Fälle müssen wir Reihen benutzen, deren allgemeine Glieder dargestellt werden durch

$$\frac{1}{nl^a n}, \quad \frac{1}{nlnl^a ln}, \quad \frac{1}{nlnllnl^a lln} \text{ u. s. w.}$$

Für alle diese Reihen ist es indessen leicht die Kriterien für die Konvergenz aufzustellen; man findet nämlich durch eine einfache geometrische Betrachtung, dass die unendliche Reihe

$$\Sigma t_n$$

und das Integral

$$\int^{\infty} t_n dn$$

gleichzeitig endliche und unendliche Werte haben. Nun ist in den angeführten Fällen das unbestimmte Integral, multipliciert mit $(1-a)$, beziehungsweise

$$l^{1-a}n, \quad l^{1-a}ln, \quad l^{1-a}lln \text{ u. s. w.},$$

und für $n = \infty$ sind alle diese Grössen unendlich für $a < 1$, endlich für $a > 1$.

Nun erhalten wir in den angeführten Fällen für $t_n : t_{n+1}$ beziehungsweise

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{a}{nln} + \ldots, \quad 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \frac{a}{nlnlln} + \ldots \text{u. s. w.};$$

Digitized by Google

ist also

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{k_1}{nln} + \frac{k_2}{nlnlln} + \ldots,$$

so können wir, wenn wir passende Werte von a wählen, schliessen, dass *die Reihe konvergent ist, wenn der erste von 1 verschiedene Zähler, auf den wir stossen, grösser als 1 ist; ist er dagegen kleiner als 1, so ist die Reihe divergent.* Mann muss so lange mit der Entwickelung fortfahren, bis man auf einen Zähler stösst, der von 1 verschieden ist; denn so lange der Zähler 1 ist, kann man keinen Wert von a wählen, der die Frage entscheidet. Die Zähler werden bestimmt durch

$$k_1 = \lim ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right],$$

$$(4) \qquad k_2 = \lim lln\left[ln\left(n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] - 1\right) - 1\right] \text{u.s.w.}$$

In dieser Form sind die Bedingungen dargestellt von *Bertrand* und *de Morgan.*

57. Hier ist der Ort eine Entwickelung anzuführen, die von *J. L. W. V. Jensen* (Tidsskrift for Mathematik 1884, S. 63)[1]) herrührt, und die zwar nicht wie die obenstehende zeigt, wie jedes einzelne der entwickelten Kriterien als eine notwendige Erweiterung der vorhergehenden zustandekommt, die aber auf der anderen Seite eine allgemeine Methode in der möglichst einfachen Form darstellt. Der Satz von *Jensen* lautet:

Wenn für beliebige positive Werte der Zahlen a für ein gewisses n und alle grösseren n

$$(5) \qquad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqq a > 0,$$

so ist die Reihe konvergent, während sie divergent ist, wenn die angeführte Differenz gleich oder kleiner als Null und zugleich die Reihe

$$\sum \frac{1}{a_n}$$

divergent ist.

---

[1]) Der Satz ist früher in unvollständiger Form von *Kummer* gegeben worden (Crelles Journal, Bd. XIII.).

Digitized by Google

Setzt man

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} = t_n,$$

so ist

$$\sum_p^\infty t_n = a_p u_p - a_\infty u_\infty.$$

Hier muss das letzte Glied endlich sein, da die Summe den gegebenen Bedingungen gemäss nicht negativ sein kann. Die Reihe Σt ist deshalb konvergent. Dasselbe muss dann auch der Fall sein mit der Reihe Σu, denn man hat

$$t_n \geqq \alpha u_{n+1}, \text{ mithin } u_{n+1} \leqq \frac{t_n}{\alpha}.$$

Hat man es mit einer konvergenten Reihe zu thun, so kann man auf viele Arten eine Reihe von solchen Zahlen a finden, dass der oben angeführten Ungleichheit genügt wird; es lässt sich zeigen, womit wir uns aber hier nicht aufhalten wollen, dass die Zahlen a so gewählt werden können, dass die Reihe $\sum \frac{1}{a_n}$ divergent ist. Wendet man verschiedene bekannte, divergente Reihen an, so liefert die Ungleichheit verschiedene specielle Kriterien der Konvergenz, und diese werden um so schärfer, je weniger divergent die benutzte Reihe ist. Setzt man demgemäss beziehungsweise

$$a_n = 1, \quad a_n = n, \quad a_n = nln, \quad a_n = nlnlln \text{ u. s. w.}$$

so erhält man die früher bewiesenen Sätze von *Cauchy, Duhamel* und *Bertrand*

Der zweite Teil des Satzes folgt daraus, dass man von einem gewissen n an, z. B. $n = p$, $a_p u_p < a_n u_n$ hat, wenn $n > p$.

Hieraus folgt

$$\Sigma u_n > a_p u_p \sum \frac{1}{a_n} = \infty.$$

Bei der Entwickelung der verschiedenen Kriterien der Konvergenz haben wir vorausgesetzt, dass $u_n : u_{n+1}$ einen bestimmten, von n unabhängigen Grenzwert besitzt. Wo dass nicht der Fall ist, wird die Aufgabe in der Regel besonders schwierig, und ihre Lösung lässt sich dann nicht durch allgemeine

Digitized by Google

Methoden zustandebringen. So ist eine Reihe, deren Glieder die reciproken Werte der Primzahlen sind, divergent, aber das lässt sich nicht durch die oben entwickelten Sätze beweisen.

REIHEN MIT KOMPLEXEN GLIEDERN.

58. *Eine Reihe mit komplexen Gliedern ist konvergent, wenn die Moduln dieser Glieder eine konvergente Reihe bilden.*

In der Ebene tragen wir von einem Punkte 0 aus nach einander Strecken ab, die ihrer Länge und Richtung nach bestimmt sind durch die Moduln und Argumente der einzelnen Glieder; dadurch bilden wir eine gebrochene Linie, und wenn diese nach einem gewissen Grenzpunkt A konvergiert, so giebt die Linie OA durch ihre Länge und Richtung die Summe der Reihe an. Es kommt deshalb darauf an zu beweisen, dass es einen bestimmten Grenzpunkt in endlichem Abstande von O giebt. Nun mögen die Moduln eine konvergente Reihe bilden, deren Summe a ist; die gebrochene Linie kann dann nicht über eine Kreisperipherie hinausgehen, deren Mittelpunkt in O liegt und deren Radius a ist. Es seien nun so viele Glieder abgetragen, dass die gebrochene Linie die Länge b erhalten und einen Punkt B erreicht hat. Die Punkte, zu denen wir gelangen können, wenn wir mehr Glieder mitnehmen, müssen dann alle innerhalb einer Kreisperipherie um B als Mittelpunkt und mit $a—b$ als Radius belegen sein. Fahren wir auf diese Weise fort, so bestimmen wir nach und nach Kreise mit immer kleineren Radien, die alle diejenigen Punkte enthalten, zu denen wir durch fortgesetzte Summation gelangen können; da wir nun so viele Glieder mitnehmen können, dass die Summe der Moduln so nahe an a herankommt wie wir wollen, so können wir auch die Radien der Kreise so klein machen wie wir wollen, und dadurch wird die Lage eines gewissen Punktes, des Grenzpunktes, bestimmt.

Wenn die Rede davon ist, die Glieder in einer Reihe R zu vertauschen, so meint mann damit, dass eine neue Reihe R_1 so gebildet wird, dass eine beliebig gewählte Anzahl von den ersten Gliedern der einen Reihe sich immer zwischen

Digitized by Google

einer hinreichend grossen Anzahl von den ersten Gliedern der anderen Reihe findet.

Ist die Summe der Moduln endlich, so haben die beiden Reihen dieselbe Summe.

Wir können nämlich aus der ersten Reihe so viele Glieder mitnehmen, dass die Summe der Moduln von den nachbleibenden Gliedern kleiner ist als eine willkürlich gewählte kleine Grösse α. Nehmen wir von der zweiten Reihe so viele Glieder mit, dass alle von der ersten Reihe mitgenommenen Glieder sich unter ihnen finden, so müssen die Summen der beiden endlichen Reihen eine Differenz haben, deren Modul kleiner ist als α. Da nun α so klein gemacht werden kann, wie man will, so ist der Satz bewiesen.

Konvergente Reihen, deren Summe unabhängig von der Reihenfolge der Glieder ist, heissen *unbedingt konvergent.* Mithin:

Eine Reihe ist unbedingt konvergent, wenn die Moduln der Glieder eine endliche Summe haben.

Anders verhält es sich, wenn die Summe der Moduln unendlich ist; die Reihe kann dessen ungeachtet konvergent sein, aber ihre Summe ist abhängig von der Reihenfolge der Glieder; wie viele Glieder wir auch mitnehmen mögen, die nachbleibenden Glieder haben immer eine unendliche Summe der Moduln; bilden wir zwei endliche Summe wie oben, so braucht ihr Unterschied daher nicht gegen Null zu konvergieren.

Für konvergente Reihen mit einer unendlich grossen Summe der Moduln ist deshalb die Summe der Reihe abhängig von der Reihenfolge der Glieder.

Solche Reihen heissen *bedingt konvergent.*

Als Beispiel können wir die unendliche Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots$$

nehmen, deren Summe $l2$ ist. Die positiven Glieder für sich und die negativen Glieder für sich bilden divergente Reihen, und dieser Umstand bewirkt, das wir, wenn wir die Glieder in einer passenden Reihenfolge nehmen, jede Summe erhalten können, die wir wollen: z. B. 100; da die positiven Glieder eine

Digitized by Google

divergente Reihe bilden, so können wir nämlich zuerst von diesen so viele nehmen, dass die Summe über 100 beträgt, darauf so viele von den negativen, bis die Summe unter 100 heruntergegangen ist, darauf wieder so viele von den positiven, bis die Summe wieder über 100 beträgt, und so fort; wir lassen auf diese Weise kein Glied aus, ordnen aber die Glieder auf solche Weise, dass der Grenzwert der Summe 100 beträgt.

59. Der Verfasser hat auf eine merkwürdige Art von Reihen aufmerksam gemacht[1]), deren Summe aus einem bestimmten und einem unbestimmten Teil besteht.

Die Reihe möge eine unendliche Summe der Moduln haben, *während die Moduln der Glieder und die Differenz zwischen den Argumenten von zwei konsekutiven Gliedern von einem gewissen Gliede an gerechnet nach Null zu abnehmen.* Tragen wir die Glieder geometrisch ab wie oben, so wird die gebrochene Linie sich immer mehr einer stetigen Kurve nähern. Ein Kreis durch drei konsekutive Punkte hat den Radius

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{mod}(u_n + u_{n+1})}{\arg u_{n+1} - \arg u_n}. \tag{6}$$

Wir wollen annehmen, dass diese Grösse von einem gewissen Gliede an gerechnet sich stetig abnehmend (wachsend) einem gewissen Grenzwerte a nähert. Jeder von den Kreisen wird dann alle folgenden umschliessen (von ihnen eingeschlossen werden) und muss deshalb als Grenzlage einen festen Kreis mit dem Radius a haben. Dieser ist der Asymptotenkreis der Kurve; ist sein Mittelpunkt durch die komplexe Zahl b bestimmt, so ist die Summe der Reihe

$$b + a_\theta$$

wo b und a bestimmt sind, während das Argument θ, da die Summe der Moduln unendlich ist, vollkommen unbestimmt ist.

Als Beispiel kann die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1-ai}}$$

[1]) Skandinavisk Naturforskermøde i Kjøbenhavn 1892, S. 354.

Digitized by Google

dienen, wo α eine gegebene positive Grösse bedeutet; hier erhalten wir, abgesehen von verschwindenden Gliedern

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{n}}{\alpha l \cdot \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Die Reihe nähert sich also der Konvergenz, wenn α bis ins Unendliche wächst.

POTENZREIHEN.

60. Wir wollen annehmen, dass eine Potenzreihe mit positiven, ganzen Exponenten

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

konvergent sei für einen Punkt z_1 mit dem Modulus r_1. Es sei z_2 ein anderer Punkt mit dem Modulus $r_2 < r_1$. Die Reihe

$$1 + \frac{r_2}{r_1} + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + \ldots$$

ist dann konvergent und liefert eine neue konvergente Reihe, wenn alle ihre Glieder mit endlichen Grössen multipliciert werden; wir multiplicieren die einzelnen Glieder beziehungsweise mit $\alpha_0, \alpha_1 r_1, \alpha_2 r_1^2, \ldots$, wo $\alpha_i = |a_i|$; dann erhalten wir die konvergente Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 r_2 + \alpha_2 r_2^2 + \ldots + \alpha_n r_2^n + \ldots;$$

da aber die Glieder dieser Reihe die Moduln der Glieder der gegebenen Reihe für $z = z_2$ sind, so ist die Reihe für diesen Wert unbedingt konvergent. Da für den Punkt z_2 nur die Bedingung $r_2 < r_1$ gestellt ist, so kann z_2 ein beliebiger Punkt sein innerhalb einer Kreisperipherie mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und r_1 als Radius. Ist r_1 so gross wie möglich gewählt, so heisst der Kreis der *Konvergenzkreis der Reihe;* die Reihe ist unbedingt konvergent für jeden Punkt innerhalb seiner Peripherie, und nicht konvergent für einen Punkt ausser-

Digitized by Google

halb derselben; für die Punkte der Peripherie selbst ist das Verhältnis verschieden.

Vertauschen wir z mit $z-a$, so wird die Bedingung für die Konvergenz

$$|z-a|<r_1,$$

und das Konvergenzgebiet wird deshalb von einem Kreise mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt in a begrenzt. Vertauschen wir dagegen z mit $\frac{1}{z}$, so wird die Bedingung für die Konvergenz

$$|z|>r_1,$$

so dass das Konvergenzgebiet sich bezeichnen lässt als begränzt von einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Punkte ∞ liegt. Unter einer Reihe, die nach Potenzen von $z-a$ fortschreitet, wenn a auf den unendlich fernen Punkt fällt, wollen wir deshalb, um diesen Fall in den allgemeinen mit einzubegreifen, eine Reihe verstehen, die nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitet.

TAYLORS FORMEL, ANGEWANDT AUF POTENZREIHEN.

61. Bevor wir zur Untersuchung von *Taylors* Formel, angewandt auf Potenzreihen, gehen, müssen wir einen Hülfssatz beweisen.

Wir wollen eine doppelt unendliche Anzahl von positiven Grössen betrachten, die in unendlich vielen Reihen mit unendlich vielen Gliedern in jeder Reihe angeordnet sind wie die Elemente einer Determinante von unendlich hoher Ordnung. Wir bilden nun die Summe aller Grössen, indem wir mit der ersten Reihe beginnen, darauf die zweite nehmen u. s. w.; wir nehmen an, dass die Reihen alle konvergent seien und beziehungsweise die Summen $S_1, S_2 \ldots$ haben; wir nehmen ferner an, dass die unendliche Reihe ΣS_i konvergent sei und die Summe S habe; wir können dann, wenn a eine gegebene Grösse, so klein wie wir wollen, bezeichnet, eine Zahl n so bestimmen, dass

Digitized by Google

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

um einen Betrag von S abweicht, der kleiner ist als α.

Nun können wir eine Zahl m von solcher Grösse finden, dass die Summe der m ersten Glieder in jeder der Reihen S_1, $S_2 \ldots S_n$ um weniger als $\frac{\beta}{n}$ von der Summe der Reihe abweicht, wo β so klein ist, wie man will.

Wir sehen also, dass wir n und m so gross machen können, dass die Summe der mn Glieder, die wir erhalten, wenn wir nur die n ersten Reihen benutzen und von jeder von diesen nur die m ersten Glieder, von der Summe S so wenig abweichen wird, wie man will. Nun geben jedoch die mn Glieder, wenn wir sie erst nach Kolumnen addieren, dieselbe Summe, wie wenn wir sie erst nach Reihen addieren, und die Summe der ∞^2 Grössen muss deshalb dieselbe werden, einerlei ob wir erst die Reihen oder erst die Kolumnen addieren. Ob einige von den Reihen S_i endlich sind, ist dabei ohne Bedeutung.

62. Nun betrachten wir die Reihen

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{7}$$

und

$$f(z+h) = a_0 + a_1(z+h) + a_2(z+h)^2 + \ldots, \tag{8}$$

und nehmen an, das beide Punkte, z und $z+h$, im Konvergenzgebiete liegen, so dass die Reihen unbedingt konvergent sind; wir wollen untersuchen, wie es sich mit der Konvergenz der zweiten Reihe verhält, wenn wir sie nach Potenzen von h ordnen.

Wir ordnen die Glieder von $f(z+h)$ in Reihen wie

$$\begin{array}{l} a_0 \\ a_1 z + a_1 h \\ a_2 z^2 + 2a_2 z h + a_2 h^2 \\ a_3 z^3 + 3a_3 z^2 h + 3a_3 z h^2 + a_3 h^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

und setzen voraus, dass die Doppelreihe, die wir erhalten, wenn wir jedes der Glieder durch seinen Modulus ersetzen, summiert

Digitized by Google

nach Reihen auf die oben angegebene Weise, eine bestimmte endliche Summe habe; dasselbe gilt dann, wenn wir nach Kolumnen summieren, aber dadurch erhalten wir eben die Summe der Moduln für die einzelnen Glieder in der Reihe

$$f(z)+\frac{1}{1}f'(z)h+\frac{1}{1\cdot 2}f''(z)h^2+\ldots, \tag{9}$$

so, dass diese unbedingt konvergent ist. $f'(z)$, $f''(z)\ldots$ stehen hier als abgekürzte Bezeichnungen für die unendlichen Reihen

$$a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots,\quad 2a_2+6a_3z+\ldots \text{ u. s. w.}$$

Wir haben jedoch zu beachten, dass wir in den Modulusreihen nicht die Moduln zu den Potenzen von $z+h$ haben, sondern dass sie die Form $|a_p|(|z|+|h|)^p$ haben. Mithin:

Wenn wir aus einer Potenzreihe für $f(z)$ die Taylorsche Formel für $f(z+h)$ bilden, indem wir die abgeleiteten Funktionen durch Differentiation der gegebenen Reihe Glied für Glied herstellen, so ist die Taylorsche Reihe konvergent für solche Werte von h, für welche $|z|+|h|$ kleiner ist als der Radius des Konvergenzkreises der gegebenen Reihe.

Die gestellte Bedingung ist immer erfüllt für hinreichend kleine h, wenn nur z in endlichem Abstande innerhalb der Peripherie des Konvergenzkreises liegt; wir haben deshalb für ein jedes solches z, wenn wir nun $f'(z)$ in seiner gewöhnlichen Bedeutung als abgeleitete Funktion nehmen,

$$f'(z)=\lim\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots$$

und analog für die folgenden abgeleiteten Funktionen. Man sieht hieraus, dass *die durch eine Potenzreihe definierte Funktion monogèn ist,* und dass *ihre Abgeleiteten sich durch Differentiation aus den Gliedern der Reihe bilden lassen,* wodurch man Reihen erhält, *die dasselbe Konvergenzgebiet haben wie die ursprüngliche Reihe.* Hier ist jedoch vorausgesetzt, dass z nicht auf oder unendlich nahe bei dem Grenzkreise des Konvergenzgebietes liegt.

Digitized by Google

Setzen wir $z = a$, $h = z - a$, so liefert *Taylors* Formel

$$(10)\quad f(z) = f(a) + \frac{1}{1} f'(a)(z-a) + \frac{1}{1\cdot 2} f''(a)(z-a)^2 + \ldots,$$

wodurch die Reihenentwickelung für $f(z)$ nach Potenzen von $z-a$ bestimmt wird, oder, wie wir es nennen wollen *die Reihenentwickelung vom Punkte a aus.* Wir haben gesehen, dass die Reihe unbedingt konvergent ist, wenn $|z-a| + |a|$ kleiner ist als der Konvergenzradius der gegebenen Reihe, also in einem Kreise mit dem Mittelpunkte in a, der ganz innerhalb des ursprünglichen Konvergenzgebietes belegen ist. In Wirklichkeit wird der Konvergenzkreis um a in der Regel über das ursprüngliche Konvergenzgebiet hinausgehen und dadurch eine Bestimmung der Funktion für Punkte liefern, für welche die ursprüngliche Reihe sich nicht benutzen lässt; von diesen Punkten aus kann man in neuen Reihen entwickeln, deren Konvergenzkreise in neue Gebiete hinein ragen und so fort. Später werden wir auf eine genauere Untersuchung dieser Verhältnisse eingehen; hier wollen wir nur bemerken, dass kein Konvergenzkreis sich über einen Pol hinaus erstrecken kann, da in einem solchen der Funktionswert unendlich ist und sich deshalb nicht durch eine konvergente Reihe bestimmen lässt. Ist $f(z)$ mehrdeutig, so werden die Konvergenzkreise sich allmählich in die verschiedenen Blätter der Riemannschen Fläche der Funktion hineinerstrecken, aber keiner kann über einen in demselben Blatt liegenden Verzweigungspunkt hinausgehen, denn, wie früher angeführt, muss die Reihenentwickelung von einem solchen Punkt aus gebrochene Exponenten enthalten.

Beisp. 1.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots;$$

$$\frac{1}{1-(z+h)} = \frac{1}{1-z} + \frac{h}{(1-z)^2} + \frac{h^2}{(1-z)^3} + \ldots,$$

oder

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} + \frac{z-a}{(1-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(1-a)^3} + \ldots.$$

Die gegebene Reihe hat den Konvergenzradius 1; die Reihe

Digitized by Google

von a aus ist konvergent, wenn $|z-a|<|1-a|$; ihr Konvergenzkreis erstreckt sich deshalb bis an den Pol 1 der Funktion.

Beisp. 2.

$$(1-z)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2^2 \cdot 2}z^2 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}z^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}z^4 - \dots .$$

Der Konvergenzradius ist 1. *Duhamels* Theorem zeigt, dass die Reihe konvergent ist für $z=1$; für alle Peripheriepunkte ist $|z|=1$, und die Reihe ist deshalb unbedingt konvergent für alle diese Punkte. Der Konvergenzkreis für die Reihe vom Punkte a aus, wo $|a|<1$, erstreckt sich bis an den Verzweigungspunkt 1. In diesem ist die Funktion endlich, aber ihre Abgeleitete ist unendlich.

Beisp. 3.

$$1 + az + a^2z^4 + a^3z^9 + a^4z^{16} + \dots, \quad |a|<1.$$

Der Konvergenzradius ist 1. Die Funktion besitzt, was wir hier nicht zeigen können, die Eigenschaft, dass sich keine neuen Konvergenzkreise bilden lassen, die sich über die Peripherie des ersten Kreises hinaus erstrecken; dieser Kreis ist das, was man *die natürliche Grenze der Funktion* nennt, über welche hinaus sie sich nicht definieren lässt. Nichtsdestoweniger sind die Reihe für die Funktion und die Reihen für alle ihre Abgeleiteten konvergent für alle Punkte der Peripherie des Grenzkreises.[1])

63. Eine Reihe wird von *Weierstrass gleichmässig* konvergent in einem gewissen Gebiet genannt, wenn man für eine gegebene positive Zahl α, die so klein ist wie man will, einen solchen Wert von n finden kann, dass der Unterschied zwischen der Summe der Reihe und der Summe der ersten n Glieder für den angegebenen und alle grösseren Werte von n einen Modulus hat, der kleiner ist als α für jeden Punkt des Gebietes. Da eine endliche Reihe von stetigen Gliedern immer stetig ist, so muss eine unendliche Reihe von solchen Gliedern

[1]) Freedholm. C. R. 24. Märtz 1890.


Digitized by Google

eine Funktion darstellen, die stetig ist in dem ganzen Gebiet, in dem die Reihe gleichmässig konvergent ist.

Wenn die Reihe nicht gleichmässig konvergent ist, kann die Summe recht wohl unstetig sein, z. B. Reihen von der Form $\Sigma u_n \sin n\theta$. Das ist zuerst von *Abel* nachgewiesen, nachdem *Cauchy* in der Beantwortung dieser Frage fehl gegriffen hatte.

Potenzreihen, deren Konvergenzgebiet sich durch *Cauchys* Satz bestimmen lässt, sind gleichmässig konvergent innerhalb eines Kreises, der denselben Mittelpunkt hat wie der Konvergenzkreis, dessen Radius aber um eine endliche Grösse kleiner ist, als der Konvergenzradius. In dem genannten Flächenstück ist die Reihe nämlich unbedingt konvergent, und man hat deshalb für ein gewisses n und alle grösseren n, wenn γ eine positive Grösse kleiner als 1 bedeutet,

$$\operatorname{mod} u_{n+1} < \gamma \operatorname{mod} u_n, \quad \operatorname{mod} u_{n+2} < \gamma \operatorname{mod} u_{n+1} < \gamma^2 \operatorname{mod} u_n, \ldots,$$

mithin

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) &< \operatorname{mod} u_{n+1} + \operatorname{mod} u_{n+2} + \ldots \\ &< \operatorname{mod} u_n \gamma (1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots) \\ &= \gamma \frac{\operatorname{mod} u_n}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Bestimmt man nun n derartig, dass $\gamma \operatorname{mod} u_n < \alpha (1-\gamma)$, so hat der Unterschied zwischen der Summe der Reihe und der Summe der n ersten Glieder für alle Punkte des betrachteten Flächenstücks einen Modulus kleiner als α; die Konvergenz ist also gleichmässig. Gelangt man unendlich nahe an die Peripherie des Konvergenzkreises, so hört die Konvergenz auf gleichmässig zu sein.

64. Wir wollen nun diejenigen Punkte näher betrachten, die auf der Peripherie des Konvergenzkreises liegen, wobei wir jedoch voraussetzen, dass die Funktion sich durch neue Reihen über diesen Kreis hinaus erweitern lässt. Die Funktion hat dann einen bestimmten Wert in einem Punkte der Peripherie, über den hinaus die Erweiterung geschehen kann, und dieser Wert muss derjenige Grenzwert sein, dem sich die Summe der

Digitized by Google

Reihe nähert, wenn z sich vom Innern des Kreises dem Punkte der Peripherie nähert; denn bei dieser Variation von z ist die Reihe beständig unbedingt konvergent und stetig und bestimmt dieselben Werte der Funktion wie eine von den Reihen, deren Konvergenzkreis den Punkt der Peripherie enthält. Nun frägt es sich, ob wir auch den wahren Funktionswert erhalten, wenn wir diesen nicht als Grenzwert bestimmen, sondern ihn dadurch suchen, dass wir den dem Punkte der Peripherie entsprechenden Wert z direkt einsetzen.

Nun sehen wir sofort, dass dies nicht der Fall sein kann in den häufig eintretenden Fällen, wo die Reihe für den Punkt der Peripherie *oscillierend* wird, worunter wir verstehen, dass die Summe nicht bestimmt ist, sondern zwischen gewissen endlichen Werten schwingt. So wird für die Reihe

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

der Wert $z = 1_\theta$ die Summe oscillierend machen, ausgenommen für $\theta = 0$. Nähern wir uns dagegen dem Punkte 1_θ von innen, so ist die Reihe beständig unbedingt konvergent und liefert denselben Wert wie $\frac{1}{1-z}$, so dass der Grenzwert dadurch gefunden werden kann, dass man hierin 1_θ für z einsetzt.

Wir wollen nun annehmen, dass die Reihe für den Punkt der Peripherie bedingt konvergent wird. Die Summe ist dann abhängig von der Reihenfolge der Glieder; innerhalb der Peripherie aber ist die Reihe unbedingt konvergent, so dass wir die Glieder nehmen können in welcher Reihenfolge wir wollen, ohne dass dadurch der Grenzwert, der den wahren Funktionswert darstellt, verändert wird. Dass lässt sich nur dadurch erklären, dass die Reihe bei einer Umordnung ihrer Glieder im Punkte der Peripherie unstetig werden kann.

Als Beispiel können wir die Reihe

$$l(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \dots$$

nehmen; diese liefert für $z = 1$ die bedingt konvergente Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots = l2.$$

Digitized by Google

Schreiben wir die oben genannte Reihe

$$z + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{5}z^5 + \tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots,$$

so erhalten wir für $z = 1$

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \ldots = \tfrac{3}{2} l2.$$

Hier muss die zweite Form der Reihe ebensowohl wie die erste nach dem wahren Funktionswerte $l2$ zu konvergieren, wenn z sich 1 nähert; ihre Summe muss deshalb im Punkte 1 von $l2$ nach $\frac{3}{2} l2$ springen. Die Erklärung ergiebt sich leicht; wir setzen

$$\varphi(z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 \ldots + \frac{1}{4n-1} z^{4n-1};$$

$$\varphi_1(z) = z + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{2}z^2 \ldots + \frac{1}{4n-1} z^{4n-1}$$

und

$$\varphi_1(z) - \varphi(z) = \psi(z) = \frac{1}{2n} z^{2n} + \frac{1}{2n+2} z^{2n+2} \ldots + \frac{1}{4n-2} z^{4n-2}.$$

Lassen wir nun n bis ins Unendliche wachsen, so erhalten wir für $z < 1$

$$\lim \psi(z) \leqq \lim n \cdot \frac{1}{2n} z^{2n} = \lim \tfrac{1}{2} z^{2n} = 0,$$

aber für $z = 1$

$$\lim \psi(1) = \lim \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{4n-2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim \left(\sum_1^{2n-1} \frac{1}{n} - \sum_1^{n-1} \frac{1}{n}\right);$$

hiervon ist, wie im 8. Kapitel gezeigt werden wird, der Wert eben $\frac{1}{2} l2$.

65. In dem hier untersuchten Beispiel erhielten wir den wahren Funktionswert, wenn wir in die gegebene Reihe, die nach steigenden Exponenten geordnet war, $z = 1$ einsetzten. Dieser Fall ist in dem folgenden von *Abel* bewiesenen Satz mit einbegriffen:

Wenn wir in eine Reihe, die nach steigenden Exponenten geordnet ist,

Digitized by Google

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

einen besonderen Wert für z einsetzen und dadurch eine konvergente Reihe erhalten, so ist die Summe dieser Reihe der wahre Funktionswert für den gegebenen Wert von z.

Wir brauchen nur solche Werte von z zu betrachten, die zum Grenzkreise gehören. Wir können voraussetzen, was sich jedenfalls durch eine kleine Änderung von z erreichen lässt, dass der Konvergenzradius 1 ist und dass derjenige Punkt der Peripherie, den wir untersuchen wollen, $z = 1$ ist. Ferner können wir voraussetzen, dass alle Koefficienten reell sind, da wir im entgegengesetzten Falle die Reihe in zwei andere zerlegen können, die eine mit reellen, die andere mit rein imaginären Koefficienten, und dann diese jede für sich untersuchen. Endlich setzen wir voraus, was sich jedenfalls durch eine Änderung von a_0 erreichen lässt, dass die konvergente Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

die Summe Null hat. Dann wollen wir beweisen, dass wir auch die Summe Null erhalten, wenn wir z wachsend sich 1 nähern lassen.

Setzen wir

$$a_0 = s_0;\; a_0 + a_1 = s_1;\; a_0 + a_1 + a_2 = s_2 \text{ u. s. w.},$$

so erhällt die Reihe die neue Form

$$f(z) = (1 - z)(s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots),$$

wo wir nun

$$z = 1 - \frac{1}{w}$$

setzen und w bis ins Unendliche wachsen lassen.

Da die Grössen s von einem gewissen Gliede an nach Null zu abnehmen, so müssen wir ein solches n finden können, dass s_{n+1} und alle folgenden Grössen s ihren numerischen Werten nach kleiner sind als eine gewisse positive Zahl k; nun haben wir

Digitized by Google

$$f\left(1-\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w}\left[s_0+s_1\left(1-\frac{1}{w}\right)\ldots+s_n\left(1-\frac{1}{w}\right)^n\right]$$
$$+\frac{1}{w}\left(1-\frac{1}{w}\right)^{n+1}\left[s_{n+1}+s_{n+2}\left(1-\frac{1}{w}\right)+\ldots\right].$$

Wenn wir in der letzten Klammer k statt $s_{n+1}, s_{n+2}\ldots$ setzen, so wird ihr Wert kw, und ihr wirklicher Wert muss deshalb zwischen $+kw$ und $-kw$ liegen, so dass das ganze letzte Glied einen Wert hat, der numerisch kleiner ist als k. Das erste Glied können wir so klein machen wie wir wollen, wenn wir w hinreichend gross nehmen. Wir können also, da k willkürlich ist, w so gross nehmen, dass die Summe für diesen und grössere Werte von w so klein ist, wie man will. Die Summe muss deshalb den Grenzwert Null haben.

66. Sind die Glieder einer Reihe Funktionen von mehreren Variablen, so werden die Verhältnisse verwickelter. Wir wollen beispielsweise eine Reihe betrachten, die nach Potenzen von z fortschreitet, während die Koefficienten einen Parameter a enthalten. Verschiedenen gegebenen Werten von a werden dann in der Regel verschiedene Konvergenzgebiete von z entsprechen, ebenso wie verschiedenen Werten von z verschiedene Konvergenzgebiete von a entsprechen werden. Will man gegebene Werte von a und z in die Reihe einsetzen, so muss mann sich darüber vergewissern, dass diese wirklich zu den Konvergenzgebieten gehören und nicht auf deren Grenzen liegen, wo die Reihe möglicherweise nicht mehr die dadurch bestimmte Funktion darstellt.

Wir wollen beispielsweise die bekannte Reihe

$$\left(1+\frac{z}{a}\right)^a=1+\frac{a}{1}\frac{z}{a}+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{a}\right)^2+\ldots$$

betrachten, wo es darauf ankommt, ob wir für einen beliebigen endlichen Wert von z mit dem Modulus r $a=\infty$ setzen dürfen und dadurch die Reihe für e^z erhalten. Nun ist

$$\operatorname{mod}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\operatorname{mod}\frac{a-n}{n+1}\cdot\frac{z}{a}<\frac{\left(1+\frac{n}{\varrho}\right)r}{n+1},$$

wo $\varrho = |a|$. Setzt man nun z. B. $\varrho = 2r$, so ergiebt sich leicht, dass man n so gross machen kann, dass der letzte Bruch für alle grösseren n und für alle grösseren ϱ, um so mehr, je grösser ϱ wird, kleiner ist als ein gewisser echter Bruch. Die Reihe ist deshalb gleichmässig konvergent im Gebiete von $a = \infty$; in diesem Punkte giebt es also keine Unstetigkeit.

VERSCHIEDENE REIHEN.

67. Wir betrachten eine Reihe $\Sigma u_n t_n$ und setzen

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n,$$

also

$$u_1 = s_1; \; u_2 = s_2 - s_1; \; \ldots u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Dadurch wird

$$u_1 t_1 + u_2 t_2 + \ldots + u_n t_n = s_1 (t_1 - t_2) + s_2 (t_2 - t_3) + \ldots + s_{n-1}(t_{n-1} - t_n) + s_n t_n.$$

Nun nehmen wir an, dass die Reihe

$$\Sigma |t_n - t_{n+1}|$$

konvergent sei, und dass s_n, wenn n bis ins Unendliche wächst, endlich ist oder zwischen endlichen Grenzen schwingt, so dass wir immer haben

$$|s_n| < a,$$

wo a eine endliche positive Grösse bedeutet. Wir haben dann

$$\Sigma |s_n(t_n - t_{n+1})| < a \Sigma |t_n - t_{n+1}|,$$

und die Reihe

$$\Sigma s_n(t_n - t_{n+1})$$

ist also unbedingt konvergent. Hieraus schliessen wir, dass die Reihe $\Sigma u_n t_n$ oscillierend oder konvergent ist, je nachdem $s_n t_n$ mit unendlich wachsenden n oscilliert oder nach Null zu abnimmt. Die Konvergenz braucht nicht unbedingt zu sein.

Setzen wir, indem wir $|t_n| > |t_{n+1}|$ voraussetzen,

$$|t_n - t_{n+1}| = \varepsilon(|t_n| - |t_{n+1}|),$$

und können wir beweisen, dass ε von einem gewissen n an

Digitized by Google

kleiner ist als eine gewisse positive Zahl, so muss die Reihe $\Sigma|t_n - t_{n+1}|$ konvergent sein, wenn $t_\infty = 0$; denn die Reihe

$$\Sigma(|t_n| - |t_{n+1}|)$$

ist unbedingt konvergent, und dies Verhältniss lässt sich dadurch nicht ändern, dass man die Glieder mit positiven Zahlen multipliciert, die kleiner sind als eine gewisse endliche Zahl.

Beisp. 1. $$t_n = \frac{1}{n};\ u_n = (-1)^{n+1};$$

die Reihe $\Sigma|t_n - t_{n+1}| = \Sigma\frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent; s_n ist abwechselnd 0 und 1, $t_\infty = 0$. Die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

ist wie bekannt bedingt konvergent.

Beisp. 2.
$$u_n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

Die Reihe oscilliert, wenn θ nicht ein Multiplum von 2π ist.

Die Reihen
$$\Sigma t_n \cos n\theta \text{ und } \Sigma t_n \sin n\theta$$

sind deshalb konvergent, wenn die Reihe $\Sigma|t_n - t_{n+1}|$ konvergent ist und $t_\infty = 0$. Wenn die Grössen t positiv und nach Null zu abnehmend sind, sind die Bedingungen erfüllt. (*Malmstens* Theorem.)

Beisp. 3. Es sei die Reihe

$$\Sigma a_n e^{-k_n z},$$

wo die Grössen k_n positiv sind und mit n bis ins Unendliche wachsen, unbedingt konvergent für $z = z_0$. Verändern wir den imaginären Teil von z_0, so bleiben die Moduln der Glieder unverändert; addieren wir eine positive Grösse zu dem reellen Teil von z_0, so werden die Moduln der Glieder kleiner; in beiden Fällen wird also die unbedingte Konvergenz dauernd stattfinden. Daraus folgt, dass das Gebiet für die unbedingte

Digitized by Google

Konvergenz derjenige Teil der Ebene ist, der rechts von einer gewissen Geraden liegt, die der Axe der imaginären Zahlen parallel ist. Links von dieser Geraden kann die Reihe divergent oder bedingt konvergent sein. Die Gerade kann sich bis ins Unendliche entfernen. *Jensen* hat bewiesen, dass auch die zweite Grenze für die bedingte Konvergenz eine Gerade ist, parallel zu der ersten, wenn diese existiert; auch die zweite Gerade kann sich bis ins Unendliche entfernen.[1])

Es kommt darauf an zu beweisen, dass wenn die Reihe konvergent ist für $z = z_0$, sie fortfährt konvergent zu sein, wenn mann $x + yi$ zu z_0 addiert, wo y beliebig ist, während x positiv ist und so klein wie man will. Setzt man nun

$$u_n = a_n e^{-k_n z_0}, \quad t_n = e^{-k_n(x+yi)},$$

so hat man $t_\infty = 0$ für positive x, und hat deshalb nur zu beweisen, dass $\Sigma |t_n - t_{n+1}|$ konvergent ist. Wir setzen der Einfachheit wegen $x = 1$, wodurch der Beweis nicht weniger allgemein wird, und erhalten, wenn $k_{n+1} - k_n = m$,

$$\varepsilon = \frac{|t_n - t_{n+1}|}{e^{-k_n} - e^{-k_{n+1}}} = \frac{|e^m - e^{-myi}|}{e^m - 1} < 1 + \frac{|1 - e^{-myi}|}{e^m - 1}$$
$$= 1 + \frac{2 \sin \frac{1}{2} my}{e^m - 1},$$

wo der Zähler des letzten Bruches positiv zu nehmen ist. Da dieser Zähler kleiner ist als $|my|$, während der Nenner grösser ist als m, so erhält man

$$\varepsilon < 1 + |y|,$$

und dadurch ist der Satz bewiesen.

Zu den betrachteten Reihen gehört die Reihe

$$\sum \frac{1}{n^z},$$

die wie bekannt unbedingt konvergent ist, wenn z positiv ist

---

[1]) Tidsskrift for Mathematik 1884, S. 63.

Digitized by Google

und grösser als 1, während sie divergent ist für $z \overline{\gtrless} 1$. Die Reihe ist also unbedingt konvergent auf der rechten Seite einer Geraden, die durch den Punkt 1 geht und senkrecht steht auf der Axe der reellen Zahlen, während sie links von dieser Geraden divergent ist. Wie sie sich auf der Geraden selbst verhält, haben wir in 59 gezeigt. Geben wir den Gliedern der Reihe abwechselnde Vorzeichen, so wird die Grenzlinie für die unbedingte Konvergenz nicht verändert, aber auf ihrer linken Seite erhält man ein Gebiet mit bedingter Konvergenz. Die Reihe

$$1 - \frac{1}{2^{\mu}} + \frac{1}{3^{\mu}} - \frac{1}{4^{\mu}} + \dots$$

ist nämlich konvergent für ein positives μ, es mag so klein sein wie es will, aber nicht für $\mu = 0$. Die zweite Grenze für die bedingte Konvergenz ist deshalb die Axe der imaginären Zahlen. Auf dieser Geraden verhält die Reihe sich wie Σn^{-z} auf der Geraden durch den Punkt 1. Der Beweis lässt sich auf ähnliche Weise führen wie der analoge Beweis in 59, wenn man die Glieder paarweise zusammenzieht.

Allgemeiner kann man

$$\Sigma \alpha^n n^{-z}$$

betrachten, wo $|\alpha| = 1$ ($\alpha = 1$ ausgenommen). Diese Reihe erhält dieselben Gebiete für unbedingte und bedingte Konvergenz wie die obengenannte.

DAS RECHNEN MIT REIHEN.

68. Sind die beiden Reihen Σu_n und Σv_n konvergent, so sieht man leicht, dass die Reihe $\Sigma(u_n + v_n)$ auch konvergent ist in dem Gebiet, welches gemeinsam ist für die Konvergenzgebiete der beiden Reihen, und darin eine Summe hat, die man durch Addition der Summen der beiden gegebenen Reihen findet. Haben die gegebenen Reihen dasselbe Konvergenzgebiet, so kann die dritte ein grösseres erhalten. Addieren wir z. B. Glied für Glied die beiden Reihen für sin z und für arc tg z,

Digitized by Google

so erhalten wir eine Reihe, deren Konvergenzkreis den Radius 1 hat; subtrahieren wir aber von dieser die Reihe für arc tg z, die dasselbe Konvergenzgebiet hat, so erhalten wir die Reihe für sin z, die konvergent in der ganzen Ebene ist.

Der Satz über die Addition von zwei Reihen lässt sich auf mehrere erweitern; ihre Anzahl muss jedoch endlich sein.

Zwei konvergente Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \text{ und } v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

multiplicieren, heisst, die Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + \dots$$

bilden, worin

$$t_0 = u_0 v_0; \ t_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0; \ t_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0; \\ \dots t_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Diese Reihe ist in gewissen Fällen konvergent und hat eine Summe die gleich dem Produkte der Summen der gegebenen Reihen ist.

Um dies näher zu untersuchen wollen wir zuerst annehmen, dass die beiden Reihen positive Glieder haben. Bezeichnen wir die Summe ihrer n ersten Glieder beziehungsweise mit U_n und V_n, so liegt die Summe $t_0 + t_1 + \dots t_{2n}$ zwischen $U_n V_n$ und $U_{2n} V_{2n}$; man kann aber n so gross machen, dass beide diese Produkte für dieses und grössere n so wenig von dem Produkte der Summen der Reihen abweichen, wie man will; dasselbe muss dann für Σt_n gelten. Hieraus sehen wir zugleich, dass die Summe derjenigen Glieder in $U_n V_n$, für welche die Summe der Indices grösser ist als n, für unendlich wachsende n nach Null zu konvergieren muss.

Nun seien die beiden Reihen zwei beliebige *unbedingt* konvergente Reihen. Da man $U_n V_n$ dem Produkte der Summen der Reihen so nahe bringen kann wie man will, so wird dasselbe für $t_1 + t_2 + \dots + t_n$ gelten, wenn die Summe derjenigen Glieder von $U_n V_n$, deren Indexsumme grösser ist als n, für wachsende n gegen Null konvergiert. Wir haben jedoch gesehen,

Digitized by Google

dass dies stattfindet, wenn wir jedes von diesen Gliedern durch seinen Modulus ersetzen. Es gilt daher auch für die ursprünglichen Glieder.

Ferner ist

$$|t_n| < |u_0 v_n| + |u_1 v_{n-1}| + \ldots + |u_n v_0|,$$

und deshalb

$$|t_1| + |t_2| + \ldots + |t_n| < (|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_0| + |v_1| + \ldots + |v_n|).$$

Wir haben also folgenden Satz:

Sind die beiden Reihen Σu und Σv unbedingt konvergent, so gilt dasselbe für Σt, und die Summe dieser Reihe ist das Produkt der Summen der beiden ersten Reihen.

Diese Multiplikationsregel darf nicht auf bedingt konvergente Reihen angewandt werden[1]; so würde man aus

$$\Sigma u = \Sigma v = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

erhalten:

$$\pm t_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}\right)$$
$$> n \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2n}{n+1},$$

ein Wert, der für unendlich wachsende n gegen 2 konvergiert.

UNENDLICHE PRODUKTE.

69. Das unendliche Produkt

$$(11) \qquad P = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3) \ldots (1 + \alpha_n) \ldots$$

heisst *konvergent* mit dem Werte P (endlich und nicht Null), wenn man für jede gegebene noch so kleine Grösse α ein solches

[1]) *Mertens* hat gezeigt (Crelles Journal, Bd. 79), dass die Multiplikationsregel sich anwenden lässt, wenn nur die eine Reihe unbedingt konvergent ist; ein einfacherer Beweis ist von *Jensen* gegeben in „Tidsskrift for Mathematik“ 1879.

Digitized by Google

n finden kann, dass das Produkt aus den $n+m$ ersten Faktoren für alle positiven Werte von m in einem Kreise um P als Mittelpunkt und mit α als Radius liegt. Wenn der Modulus des Produktes für wachsende n gegen Null abnimmt oder ohne Grenze wächst, so heisst es *divergent.*

Die Begriffe unbedingte, bedingte und gleichmässige Konvergenz u. s. w. werden auch auf unendliche Produkte mit einer leicht verständlichen Bedeutung angewandt. Es ist einleuchtend, dass $\lim |\alpha_n| = 0$ eine notwendige Bedingung für Konvergenz ist.

Sind alle Grössen α positiv, so ist das Produkt konvergent oder divergent, je nachdem $\Sigma\alpha$ konvergent oder divergent ist.

Man hat nämlich, wenn man das Produkt der n ersten Faktoren mit π_n bezeichnet und die Summe der n ersten Grössen α mit s_n,

$$1 + s_n < \pi_n < e^{s_n}.$$

Wir sehen hieraus, dass das Produkt, wenn $\Sigma\alpha$ konvergent ist, zwischen zwei bestimmte endliche Grenzen fällt; da es nun beständig wächst, so muss es sich einem gewissen Grenzwert nähern. Ferner zeigt die Ungleichheit, dass das Produkt ohne Grenze wächst, wenn s_n ohne Grenze wächst.

Der Satz gilt auch, wenn die Grössen α_n von einem gewissen n an alle negativ und verschieden von -1 sind. Wir haben nämlich, wenn wir $-\alpha_n$ für α_n setzen,

$$\pi_n = (1 - \alpha_n)\,\pi_{n-1},$$

woraus

$$\frac{\pi_{n-1} - \pi_n}{\pi_{n-1}} = \alpha_n.$$

Ist nun das Produkt konvergent, so können wir, da sein Grenzwert ein bestimmtes Vorzeichen haben muss, für hinreichend grosse n annehmen, dass $\alpha_n < 1$, so dass π_n mit wachsenden n abnimmt. Wir erhalten dann beziehungsweise niedrigere und höhere Grenzen für α_n, wenn wir für die Nenner der Brüche beziehungsweise π_{n-1} und π_∞ setzen. Daraus folgt

$$\frac{\pi_{n-1} - \pi_\infty}{\pi_{n-1}} < \sum_n^\infty \alpha_n < \frac{\pi_{n-1} - \pi_\infty}{\pi_\infty},$$

Digitized by Google

woraus hervorgeht, dass $\Sigma\alpha$ zwischen endliche positive Grenzen eingeschlossen, also konvergent ist. Ist das Produkt divergent und bis ins Unendliche wachsend, so kann α_n nicht gegen Null abnehmen und die Reihe $\Sigma\alpha$ ist deshalb auch divergent; dasselbe gilt, wenn das Produkt oscillierend ist; nehmen α_n und π_n gegen Null ab, so muss das Produkt der reciproken Werte der Faktoren bis ins Unendliche wachsen, und da, für $2\alpha_n < 1$,

$$\frac{1}{1-\alpha_n} < 1 + 2\alpha_n,$$

so muss $\Sigma 2\alpha_n$ und also auch $\Sigma\alpha_n$ divergieren. Demgemäss ist die letzte Reihe immer divergent, wenn das Produkt divergent ist.

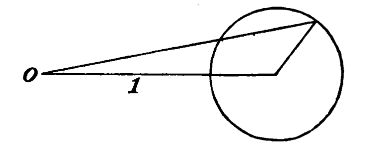
70. *Das unendliche Produkt aus komplexen Faktoren* $\Pi(1+\alpha_n)$, *ist unbedingt konvergent, wenn* $\Sigma|\alpha|$ *konvergent ist.*

Hieraus folgt nämlich, dass die unendlichen Produkte $\Pi(1-|\alpha_n|)$ und $\Pi(1+|\alpha_n|)$ konvergent sind; nun ist

$$1-|\alpha_n| < |1+\alpha_n| < 1+|\alpha_n|,$$

und der Modulus des gegebenen Produktes fällt deshalb zwischen endliche Grenzen; dasselbe gilt, wenn wir von den Moduln des Produktes nur diejenigen mitnehmen, die grösser als 1 sind, oder nur diejenigen, die kleiner als 1 sind. Von den beiden dadurch gebildeten Produkten ist das eine stetig wachsend, das andere stetig abnehmend; jedes von ihnen muss deshalb einen von der Reihenfolge der Faktoren unabhängigen bestimmten Wert haben; das gegebene Produkt hat also einen bestimmten endlichen, von der Reihenfolge der Faktoren unabhängigen Modulus.

Es ist noch übrig zu beweisen, dass die Summe der Argumente der Faktoren unbedingt konvergent ist. Für kleine Werte von α_n ist das Argument des entsprechenden Faktors gleich oder kleiner als der Winkel von der Linie 1 bis an die Tangente, die vom Nullpunkte an den kleinen Kreis mit dem Mittelpunkt im Punkte 1 und dem Radius $|\alpha_n|$ gezogen ist,



Digitized by Google

und dieser Winkel ist wieder kleiner als $|\alpha_n|:t_n$, wo t_n die Länge der Tangente bedeutet. Wir haben deshalb für alle positiven Argumente von einem gewissen Faktor an

$$\Sigma\theta_n < \Sigma\frac{|\alpha_n|}{t_n},$$

wo alle Nenner durch den kleinsten von ihnen ersetzt werden können. Wir sehen hieraus, das alle positiven Argumente eine endliche bestimmte, von ihrer Reihenfolge unabhängige Summe haben. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass dasselbe für alle negativen Argumente gilt, und deshalb auch für alle Argumente der Faktoren des gegebenen Produktes.

71. Ist $\Sigma|\alpha_n|$ konvergent, so wird dasselbe für $\Sigma|\alpha_n z|$ gelten, wo z eine beliebige Grösse mit endlichem Modulus ist. Unter diesen Bedingungen ist also das unendliche Produkt

$$(12) \qquad Q = (1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)(1+\alpha_3 z)\ldots$$

unbedingt konvergent und repräsentiert eine in der ganzen Ebene endliche Funktion von z; diese lässt sich in einer für die ganze Ebene geltenden Potenzreihe entwickeln und ist deshalb stetig und monogen. Um das zu beweisen setzen wir

$$|\alpha_n| = a_n, \quad |z| = r,$$

und betrachten das Produkt

$$P_n = (1+a_1 r)(1+a_2 r)\ldots(1+a_n r) = 1 + b_1 r + b_2 r^2 + \ldots b_n r^n,$$

wo b_p die Summe der Produkte von je p der Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$ bedeutet. P_n konvergiert gegen einen endlichen positiven Wert P; die Grössen b wachsen mit n, und da beständig

$$P_n < P,$$

so müssen sie gegen gewisse endliche und bestimmte Werte $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ konvergieren. Nun ist indessen für jedes n

$$P > 1 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \ldots + \beta_n r^n > P_n;$$

hier konvergiert P_n für wachsende n gegen P, die Summe der Reihe muss also auch gegen P konvergieren.

Digitized by Google

Wir gehen nun über zum Produkt aus komplexen Faktoren und setzen

$$Q_n = (1 + \alpha_1 z)(1 + \alpha_2 z) \ldots (1 + \alpha_n z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots c_n z^n,$$

wo $c_1, c_2 \ldots c_n$ Summen sind, die, wenn n bis ins Unendliche wächst, unbedingt konvergente Reihen werden, die gewisse Grenzwerte $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ haben, während das Produkt Q_n den Grenzwert Q hat. Da $|\gamma_p| < \beta_p$, so wird die Reihe Q_∞ unbedingt konvergent.

Nun vergleichen wir die beiden Differenzen

$$(\gamma_1 - c_1) z + (\gamma_2 - c_2) z^2 + \ldots + (\gamma_n - c_n) z^n$$

und

$$(\beta_1 - b_1) r + (\beta_2 - b_2) r^2 + \ldots + (\beta_n - b_n) r^n;$$

hier ist $(\gamma_p - c_p) z^p$ zusammengesetzt aus Gliedern, deren Moduln sich in den Gliedern von $(\beta_p - b_p) r^p$ finden, und die erste Differenz hat deshalb einen Modulus, der kleiner ist als derjenige der anderen; von diesem haben wir jedoch erfahren, dass er für wachsende n gegen Null konvergiert; wir haben also für die ganze Ebene

$$Q = \lim Q_n = 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots$$

Wir haben vorausgesetzt, dass keiner der Faktoren des unendlichen Produktes Null ist; unter dieser Voraussetzung kann das Produkt, wie wir gezeigt haben, nicht gegen Null konvergieren; die Funktion kann also nur Null werden, wenn einer von den Faktoren Null ist, und dadurch sind alle ihre Nullpunkte bestimmt. Wie weit die Funktion auf der anderen Seite durch ihre Nullpunkte bestimmt ist, wird später erwähnt werden.

Beisp. Die Produkte

$$\left(1 - \frac{z}{1}\right)\left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 - \frac{z}{3}\right) \ldots \text{ und } \left(1 + \frac{z}{1}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(1 + \frac{z}{3}\right) \ldots$$

sind beide divergent, während das Produkt

$$\left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \ldots$$

Digitized by Google

konvergent ist. Die dadurch definierte Funktion hat also die Nullpunkte ± 1, ± 2, ± 3 u. s. w., die auch die Nullpunkte für die Funktion $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ sind.

Die beiden Funktionen sind in Wirklichkeit identisch, was später (80) bewiesen werden wird.

KAPITEL VIII.

CAUCHYS INTEGRAL. REIHENENTWICKELUNGEN.

CAUCHYS INTEGRAL.

72. Es sei $f(z)$ eine Funktion, die *eindeutig* und *stetig* in einem von einer oder mehreren Randkurven begrenzten ebenen Flächenstück ist; t sei ein beliebiger Punkt dieses Flächenstücks. Der Bruch

$$\frac{f(z)}{z-t}$$

wird dann innerhalb des Flächenstücks nur im Punkte t, der $f(t)$ zum Residuum hat, unendlich werden; man hat deshalb

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-t} = f(t), \tag{1}$$

wo das Integral in positiver Richtung längs allen Randkurven zu nehmen ist. Diese wichtige Formel liefert eine Bestimmung der Funktion f, die für alle Punkte des Flächenstücks gilt, obgleich man für die Bestimmung nur die Werte der Funktion auf der Begrenzung des Flächenstücks zu kennen braucht; der Grund dafür, dass dies ausreichend sein kann, liegt darin, dass man ausserdem weiss, dass die Funktion monogen ist. Das Integral definiert nur die Funktion in dem begrenzten Flächenstück; ein Punkt t, der ausserhalb des Flächenstücks liegt, macht die Funktion unter dem Integralzeichen nicht unendlich innerhalb des Flächenstücks, und das Integral wird deshalb

Digitized by Google

Null sein. Hierdurch erhalten wir keine Erweiterung der Funktion auf Punkte ausserhalb des Flächenstücks, denn die Monogenität hört auf der Randkurve auf. Wollen wir die Funktion erweitert haben, so müssen wir die Begrenzung des Flächenstücks erweitern; das kann geschehen, so lange wir keinen singulären Punkt in das Flächenstück aufnehmen. Unter diese muss man nicht nur Pole und wesentlich singuläre Punkte rechnen, sondern auch Verzweigungspunkte, da die Aufnahme eines solchen Punktes die Eindeutigkeit der Funktion aufheben würde. Wir können jedoch auch die Formel auf eine Riemannsche Fläche anwenden, wenn wir nur beachten, dass t dann mehrere gerade über einander liegende Punkte darstellt, so dass wir, wenn mehrere von diesen in dem begrenzten Flächenstück liegen, auf der rechten Seite von (1) die Summe der zu diesen Punkten gehörenden Funktionswerte erhalten. Das Integral stellt deshalb nur die Funktion an solchen Stellen dar, wo nur Teile von *einem* der Blätter zum Flächenstück gehören. Wir wollen beispielsweise annehmen, dass die Funktion eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit zwei Verzweigungspunkten habe, die durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sind. In dem oberen Blatt grenzen wir ein Flächenstück ab, das keinen der Verzweigungspunkte enthält, und wählen im Flächenstück einen Punkt t_1. Ferner sei t_2 der gerade darunter liegende Punkt des unteren Blattes. Nun können wir unser Flächenstück über den Verzweigungsschnitt hinaus erweitern, so dass wir in das untere Blatt hinunterkommen. Das Integral stellt beständig $f(t_1)$ dar, bis wir durch die Erweiterung t_2 in das Flächenstück aufgenommen haben; dieser Punkt ist ein Pol mit dem Residuum $f(t_2)$, und nun stellt das Integral die Summe der beiden Funktionswerte dar.

73. Aus (1) erhält man

$$f(t+h)-f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\left(\frac{1}{z-t-h}-\frac{1}{z-t}\right)dz,$$

oder

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-t)^2}+\frac{h}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-t)^2(z-t-h)};$$

Digitized by Google

daraus ergiebt sich, wenn man zur Grenze übergeht und beachtet, dass das letzte Integral endlich ist,

$$(2) \qquad f'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-t)^2}.$$

Hieraus leitet man wieder ab:

$$(3) \qquad f''(t) = \frac{1\cdot 2}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-t)^3}; \quad \ldots f^{(p)}(t) = \frac{p!}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-t)^{p+1}} \ldots$$

Hier ist in allen Fällen die Funktion unter dem Integralzeichen endlich und stetig längs der Begrenzung des Flächenstücks. Mithin:

Ist eine Funktion eindeutig und stetig innerhalb eines gewissen Flächenstücks, so gilt dasselbe von ihren abgeleiteten Funktionen.

Auf einer Riemannschen Fläche müssen wir hier unter Funktion die durch das Integralzeichen definierte Funktion verstehen, so wie sie oben bestimmt wurde.

Ist

$$F(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \ldots$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder monogene Funktionen darstellen, die eindeutig und stetig innerhalb eines gewissen Flächenstückes sind, in welchem die Reihe gleichmässig konvergent ist, so ist $F(t)$ eine monogene Funktion.

Man hat nämlich, wenn das Integral auf einer geschlossenen Kurve etwas innerhalb der Begrenzung des Flächenstücks genommen wird,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \ldots}{z-t}\,dz,$$

und kann dann wie oben zeigen, dass $F(t)$ eine Abgeleitete hat, die eine Funktion von t ist.

DIE TAYLORSCHE UND MACLAURINSCHE REIHE.

74. Es sei a ein beliebiger Punkt eines begrenzten Flächenstücks; man hat identisch

Digitized by Google

$$\frac{1}{z-t}=\frac{1}{z-a-(t-a)}=\frac{1}{z-a}+\frac{t-a}{(z-a)^2}+\frac{(t-a)^2}{(z-a)^3}+\cdots$$
$$+\frac{(t-a)^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{(t-a)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-t)};$$

dadurch erhält man, wenn man die oben gefundenen Ausdrücke für die abgeleiteten Funktionen benutzt,

$$(4)\quad f(t)=f(a)+f'(a)\frac{t-a}{1}+f''(a)\frac{(t-a)^2}{1\cdot 2}+\ldots+f^n(a)\frac{(t-a)^n}{n!}+R,$$

wo

$$(5)\qquad R=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(t-a)^{n+1}f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-t)}.$$

Für hinreichend grosse n und für

$$|t-a|<|z-a|$$

erhält die Funktion unter dem Integralzeichen für alle Punkte der Begrenzung einen Modulus, der so klein ist wie man will; R konvergiert deshalb für wachsende n gegen Null. Diese Bedingung ist erfüllt für alle Punkte innerhalb einer Kreisperipherie, die ihren Mittelpunkt in a hat und keinen singulären Punkt einschliesst. Für alle derartigen Punkte kann man deshalb die bis ins Unendliche fortgesetzte Taylorsche Reihe anwenden. Der Kreis wird Konvergenzkreis der Reihe, wenn sein Radius unter den angegebenen Bedingungen so gross wie möglich gemacht wird. Für $a=0$ geht die Reihe über in die Maclaurinsche.

Es lässt sich leicht beweisen, dass die Funktion sich in keiner anderen Potenzreihe vom Punkte a aus entwickeln lässt als in der Reihe (4). Hierauf beruht die bekannte Entwickelung einer Funktion in einer Reihe mit Hülfe der Methode der unbestimmten Koefficienten.

Die Funktionen e^z, $\sin z$ und $\cos z$ sind eindeutig und stetig in der ganzen Ebene; die Reihen

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\ldots;$$
$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\ldots;$$
$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\ldots,$$

gelten deshalb für jeden endlichen Wert von z.

Digitized by Google

Funktionen, die eindeutig und stetig in der ganzen Ebene sind und im Punkte ∞ einen wesentlich singulären Punkt haben, heissen *ganze transcendente Funktionen;* sie lassen sich wie die obengenannten in Potenzreihen entwickeln, die für die ganze Ebene gelten.

Die Funktionen $l(1+z)$, arc sin z und arc tg z haben singuläre Punkte beziehungsweise in -1, ± 1 und $\pm i$. Die Reihen

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \ldots;$$

$$\text{arc sin}\, z = z + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}z^5 + \frac{1\cdot 3\; 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}z^7 + \ldots;$$

$$\text{arc tg}\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \ldots,$$

gelten deshalb nur in einem Kreise mit dem Mittelpunkt im Nullpunkte und dem Radius 1.

DIE LAURENTSCHE REIHE.

75. Eine Funktion sei eindeutig und stetig innerhalb einer gewissen Kreisperipherie, deren Mittelpunkt in a liegt; eine Ausnahme wird von einem einzelnen Punkte b gebildet, in dem die Funktion unstetig ist; diesen Punkt schliessen wir mit Hülfe eines kleinen Kreises aus; dann können wir *Cauchys* Integral zur Bestimmung der Funktion anwenden. Das Flächenstück ist nun jedoch von zwei Randkurven begrenzt, und das Integral muss längs diesen beiden in positiver Richtung geführt werden. Was den äusseren Kreis betrifft, so können wir wie bei *Taylors* Formel verfahren, indem wir $\frac{1}{z-t}$ in einer konvergenten Reihe nach Potenzen von $t-a$ entwickeln. Dadurch erhalten wir eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1(t-a) + a_2(t-a)^2 + \ldots, \tag{6}$$

deren Koefficienten bestimmt werden durch

$$a_p = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{p+1}}, \tag{7}$$

Digitized by Google

wo das Integral in positiver Richtung längs dem äusseren Kreise zu führen ist. Da diese Integrale nicht über die ganze Begrenzung geführt werden, so lassen sie sich nicht wie bei *Taylors* Formel durch die abgeleiteten Funktionen ausdrücken.

Zugleich haben wir das Integral längs dem kleinen Kreise zu führen; da wir dabei beständig

$$|t-b|>|z-b|$$

haben, so müssen wir hier eine andere Reihenentwickelung benutzen; wir setzen

$$\frac{1}{z-t}=-\frac{1}{t-b}\left(1+\frac{z-b}{t-b}+\frac{(z-b)^2}{(t-b)^2}+\ldots\right)$$

und erhalten dadurch eine Reihe

$$\beta_1(t-b)^{-1}+\beta_2(t-b)^{-2}+\beta_3(t-b)^{-3}+\ldots, \tag{8}$$

worin

$$\beta_p=\frac{1}{2\pi i}\int(z-b)^{p-1}f(z)\,dz; \tag{9}$$

dieses Integral ist, da wir das Vorzeichen verändert haben, in positiver Richtung um den Punkt b zu nehmen. Sind mehr Unstetigkeitspunkte vorhanden, so wird jeder von diesen eine neue, der ersten analoge Reihe mit sich führen.

Ist der Punkt b ein Pol, so wird, wie bald gezeigt werden soll, $(z-b)^p f(z)$ für einen gewissen Wert von p und alle grösseren Werte im Punkte b nicht unendlich, und die entsprechenden Integrale werden Null. Die b entsprechende Reihe wird also endlich. Ist b ein wesentlich singulärer Punkt, so wird die Reihe immer unendlich.

Wäre für $f(z)$ eine Entwickelung von der angegebenen Form gegeben, so würden, bei Anwendung von (7) oder (9) alle Glieder von $f(z)$ dem Integral den Wert Null erteilen, mit Ausnahme des einen, das den Exponenten p oder $-p$ hat. Es existiert deshalb keine andere Reihenentwickelung von derselben Form.

Ist die Funktion eindeutig und stetig in einem Kreisringe, wobei der Nullpunkt der gemeinsame Mittelpunkt der beiden

Digitized by Google

Kreise ist, so erhält man, wenn man wie oben verfährt, die Funktion für alle Punkte im Kreisringe ausgedrückt durch eine Reihe, die sich nach beiden Seiten bis ins Unendliche erstrecken kann mit negativen und positiven, ganzen, wachsenden Exponenten. Diese Reihe heisst die *Laurentsche* Reihe.[1])

DIE FOURIERSCHE REIHE.

76. *Eine Funktion, die eindeutig und stetig in der ganzen Ebene ist und die Periode* ω *hat, lässt sich in einer in der ganzen Ebene konvergenten Reihe entwickeln, die nach Potenzen von* $e^{\pm\frac{2\pi i}{\omega}\cdot z}$ *fortschreitet.*

Setzt man nämlich (*Cauchys* Entwickelung)

$$z = \frac{\omega}{2\pi i} lt;\ f(z) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\, lt\right),$$

so wird die Funktion, als solche von t genommen, eindeutig. Erfährt nämlich lt die Zunahme $2\pi i$, so erfährt z die Zunahme ω und $f(z)$ bleibt unverändert. Da lt für $t=0$ unendlich ist, so wird dieser Punkt ein singulärer Punkt für die Funktion und muss ausgeschlossen werden. Man kann nun *Laurents* Entwickelung benutzen, (wobei der äussere Kreis einen sehr grossen Radius hat) und erhält für $f(z)$ die Reihe

$$\ldots + b_2 t^{-2} + b_1 t^{-1} + a + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

welche die im Satze angegebene Form erhält, wenn t durch z ausgedrückt wird. Da z nur unendlich wird für $t=0$ und für $t=\infty$, so gilt die Reihe für alle übrigen Werte von z.

Wenn $f(z)$ den Bedingungen für die Periodicität nicht genügt, so kann man dennoch die Reihenentwickelung ausführen, aber da die Funktion, als Funktion von t genommen, nicht eindeutig wird, so erhält sie singuläre Punkte, und der äussere Grenzkreis wird sich nur bis an den nächsten von diesen erstrecken können. Das Gebiet für die Gültigkeit der Reihe in z erhalten wir durch Abbildung des Kreisringes auf die z-Ebene.

---

[1]) Comptes rendus. T. 17.

Digitized by Google

Nun folgt aus der Gleichung

$$t = a(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{\frac{2\pi i}{\omega}(x+iy)},$$

dass man, ω reel und positiv gedacht, hat

$$a = e^{-\frac{2\pi y}{\omega}};\ y = -\frac{\omega}{2\pi} l a;$$

hieraus geht hervor, dass der Kreisring als derjenige Teil der Ebene abgebildet wird, der über einer Geraden liegt, die der Axe der reellen Zahlen parallel ist (Vergl. Beisp. 3, S. 140.)

REIHEN VON BURMANN UND LAGRANGE.

77. Wir suchen eine gegebene Funktion $f(t)$ in einer Reihe zu entwickeln, die nach Potenzen einer anderen gegebenen Funktion $\varphi(t)$ fortschreitet; von beiden Funktionen setzen wir voraus, dass sie *eindeutig und stetig in einem gewissen einfach zusammenhängenden Flächenstück* sind. Von der Funktion φ setzen wir ferner voraus, *dass sie nicht für zwei dem Flächenstück angehörende Punkte denselben Wert hat,* und *dass ihre Abgeleitete nicht für irgendwelche Punkte des Flächenstücks Null werden kann.* Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir das Integral

$$\int \frac{f(z) - f(t)}{\varphi(z) - \varphi(t)} dz,$$

wo z die Begrenzung des Flächenstücks in positiver Richtung durchläuft, während t ein beliebiger Punkt des Flächenstückes ist.

Der Bruch ist eindeutig und kann nur unendlich werden für $z = t$, denn dies ist der einzige Wert von z, der den Nenner zu Null macht. Derselbe Wert macht jedoch auch den Zähler zu Null. Wir müssen also den wahren Wert des Bruches suchen, und finden als solchen $f'(t) : \varphi'(t)$, ein Wert, der nach unseren Voraussetzungen endlich ist. Der Bruch ist also überall innerhalb des Flächenstückes eindeutig und stetig, und daraus folgt, dass der Wert des Integrals Null ist. Wir haben dann

Digitized by Google

$$f(t)\int\frac{dz}{\varphi(z)-\varphi(t)}=\int\frac{f(z)\,dz}{\varphi(z)-\varphi(t)}.$$

Das erste Integral lässt sich leicht bestimmen; man hat nämlich

$$\frac{1}{\varphi(z)-\varphi(t)}=\frac{z-t}{\varphi(z)-\varphi(t)}\cdot\frac{1}{z-t},$$

woraus hervorgeht, dass das zu t gehörende Residuum der erste Bruch auf der rechten Seite für $z=t$ ist, oder $1:\varphi'(t)$. Man hat also

$$f(t)=\frac{\varphi'(t)}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{\varphi(z)-\varphi(t)}, \tag{10}$$

gültig für alle Punkte des Flächenstückes.

Nun nehmen wir ferner an, dass die Randkurve des Flächenstücks so gewählt ist, dass man für alle ihre Punkte $|\varphi(z)|=l$ hat, wo l eine Konstante bedeutet, so gross wie sie werden kann, wenn das Flächenstück die gestellten Bedingungen erfüllen soll. Für Punkte innerhalb der Randkurve setzen wir $|\varphi(z)|<l$ voraus. Da $\varphi'(z)$ nicht Null sein kann, so kann es kein anderes Minimum geben als Null für $|\varphi(z)|$. Man übersieht die Verhältnisse leicht, wenn man sich die gesuchte Reihe aus der *Maclaurin*schen gebildet denkt für eine Funktion $\psi(u)$, indem man $u=\varphi(t)$ setzt. Das Konvergenzgebiet in der t-Ebene ist dann die Abbildung des Konvergenzkreises in der u-Ebene; ist l der Radius des Kreises, so wird er abgebildet als eine Kurve, auf der überall $|\varphi(t)|=l$. Jeder zum Konvergenzkreise koncentrische Kreis wird abgebildet als eine Kurve, auf der $|\varphi(t)|$ überall gleich dem Radius des Kreises ist.

Wenn wir nun

$$\frac{1}{\varphi(z)-\varphi(t)}$$

nach Potenzen des für alle Punkte des Flächenstückes echten Bruches

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}$$

Digitized by Google

entwickeln und die konvergente Reihe Glied für Glied integrieren, so erhalten wir

$$(11) \qquad f(t) = \frac{\varphi'(t)}{2\pi i}(a_1 + a_2\varphi(t) + a_3\varphi^2(t) + \ldots),$$

wo

$$(12) \qquad a_p = \int \frac{f(z)\,dz}{\varphi^p(z)}.$$

Es sei a derjenige Punkt, der dem Mittelpunkt des Kreises entspricht, so dass $\varphi(a) = 0$.

Die Funktion

$$\frac{f(z)}{\varphi^p(z)}$$

wird nur in diesem Punkte unendlich; nehmen wir an, dass das entsprechende Residuum r_p ist, so haben wir $a_p = 2\pi i r_p$ und (*Burmann*sche Formel)

$$(13) \qquad f(t) = \varphi'(t)[r_1 + r_2\varphi(t) + r_3\varphi^2(t) + \ldots];$$

dieser Reihe kann man auch die Form

$$(14) \quad F(t) = \int f(t)\,dt = k + r_1\varphi(t) + \tfrac{1}{2}r_2\varphi^2(t) + \tfrac{1}{3}r_3\varphi^3(t) + \ldots$$

geben, wo k eine Konstante bedeutet.

Die Formel begreift die Umkehrungsformel von *Lagrange* in sich; hat man nämlich $u = \varphi(t)$, so kann man t nach Potenzen von $\varphi(t)$ oder u entwickeln.

Die Residuen lassen sich als Differentialquotienten schreiben; man hat nämlich, wenn der Nenner $p$mal Null im Punkt a wird

$$\frac{f(z)}{\varphi^p(z)} = \psi + \frac{r_p}{z-a} + \frac{\alpha}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{\gamma}{(z-a)^p},$$

wo ψ eine Funktion bedeutet, die für $z = a$ endlich ist, und $\alpha \ldots \gamma$ gewisse Konstanten sind, während der Zähler des ersten Bruches eben das Residuum darstellt.

Wenn wir nun mit $(z-a)^p$ multiplicieren und darauf $p-1$ Male mit Bezug auf z differentieren, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form

Digitized by Google

$$(p-1)!\,r_p + (z-a)K,$$

wo K eine Funktion bedeutet, die endlich ist für $z=a$. Das letzte Glied fällt also fort, wenn wir $z=a$ setzen, und wir haben mithin

$$\text{(15)} \qquad \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[f(z)\left(\frac{z-a}{\varphi(z)}\right)^p\right]_{z=a} = (p-1)!\,r_p$$

Beisp. 1. Wir setzen $\varphi(z) = z(z-a)$. $|\varphi(z)| = k$ bestimmt eine Kurve, die den geometrischen Ort für alle Punkte darstellt, deren Abstände von den Punkten 0 und a zum Produkte k haben. Diese Kurve ist eine *Cassini*sche Ellipse, die für $k=0$ auf die Brennpunkte 0 und a reduciert wird; für kleine Werte von k besteht die Kurve aus zwei geschlossenen Zweigen, von denen jeder einen von den beiden Brennpunkten enthält; für $k = \frac{1}{4}|a|^2$ wird die Kurve eine Lemniskate. Jedes ihrer Blätter befriedigt die für das Flächenstück gestellten Bedingungen.

Jedem Werte von $\varphi(z)$ entsprechen zwei Punkte z, aber diese liegen symmetrisch mit Bezug auf den Doppelpunkt, können als nicht in dasselbe Blatt fallen. Grössere Werte von k als diejenigen, welche die Lemniskate bestimmen, lassen sich nicht benutzen, da die Kurve für solche Werte nur aus einem geschlossenen Zweige besteht, und dieser die beiden zusammengehörenden Punkte z einschliessen würde. Da nun für die Lemniskate $\varphi'(z)$ nur im Doppelpunkte Null wird, so erhällt man, wenn $f(z)$ eine innerhalb der Blätter eindeutige und stetige Funktion darstellt,

$$f(z) = (2z-a)(r_1 + r_2 z(z-a) + r_3 z^2(z-a)^2 + \ldots),$$

gültig für das eine oder andere Blatt, je nachdem die Residuen für den einen oder anderen Brennpunkt genommen sind.

Beisp. 2. $u = ze^{-z}$. z soll in einer Reihe nach Potenzen von u entwickelt werden.

Wir haben, da $u=0$ einem $z=0$ entspricht, und wenn wir $F(z)=z$, $f(z)=1$ setzen,

$$z = r_0 u + \tfrac{1}{2} r_1 u^2 + \tfrac{1}{3} r_2 u^3 + \ldots,$$

Digitized by Google

wo r_p das Residuum darstellt für

$$\frac{1}{(ze^{-z})^{p+1}} = \frac{e^{(p+1)z}}{z^{p+1}} = \frac{1}{z^{p+1}}\left(1 + \frac{(p+1)z}{1} + \ldots + \frac{(p+1)^p z^p}{p!} + \ldots\right).$$

Das Residuum ist der Koefficient des Gliedes, dessen Nenner z ist, also

$$\frac{(p+1)^p}{p!}$$

Wir finden also

$$z = u + \frac{2}{1\cdot 2}u^2 + \frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 3}u^3 + \ldots + \frac{(p+1)^p}{(p+1)!}u^{p+1} + \ldots.$$

Beisp. 3. *Das Keplersche Problem* geht darauf aus, aus der Gleichung

$$nt = z - e\sin z$$

z nach Potenzen von

$$e = \frac{z - nt}{\sin z}$$

zu entwickeln; wir haben $f(z) = F'(z) = 1$; $a = nt$,

$$(p-1)!\; r_p = \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(\sin^p z)_{z=nt}.$$

$$z = nt + e\sin nt + \tfrac{1}{2}e^2\sin 2nt + \tfrac{1}{8}e^3(3\sin 3nt - \sin nt)$$
$$+ \tfrac{1}{6}e^4(2\sin 4nt - \sin 2nt) + \tfrac{1}{384}e^5(125\sin 5nt - 81\sin 3nt + 2\sin nt) + \ldots$$

SUMMATION ENDLICHER REIHEN.

78. Wir wollen das Integral

$$(16) \qquad I = \int \frac{\varphi(z)}{e^{2\pi i z} - 1}dz$$

untersuchen, wo $\varphi(z)$ eine innerhalb eines gewissen Flächenstückes eindeutige und stetige Funktion bedeutet, und das Integral in positiver Richtung längs der Begrenzung des Flächenstücks zu nehmen ist. Der Bruch hat Pole in denjenigen

Digitized by Google

Punkten, in denen der Nenner Null ist, d. h. für alle ganzen Zahlen. Schreiben wir den Bruch in der Form

$$\frac{z-n}{e^{2\pi i z}-1}\cdot\frac{\varphi(z)}{z-n},$$

so erhält der erste Bruch für $z=n$ den Wert $\frac{1}{2\pi i}$, wenn n eine ganze Zahl ist. Das zum Punkte n gehörende Residuum ist also $\frac{1}{2\pi i}\varphi(n)$.

Nun ist der Wert des Integrals gleich der Summe der Residuen, die zu den innerhalb des Flächenstückes liegenden Polen gehören, multipliciert mit $2\pi i$. Wenn das Flächenstück die Pole 1, 2, 3 ... n enthält, so erhalten wir also

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots\varphi(n)=I. \tag{17}$$

Wenn $\varphi(z)$ nicht stetig ist, sondern Pole innerhalb des Flächenstückes hat, so hat man die diesen entsprechenden Glieder hinzuzufügen.

Im besondern wollen wir uns das Flächenstück von einem Rechteck begrenzt denken, von dem das eine Paar paralleler Seiten senkrecht steht auf der Axe der reellen Zahlen und diese in den Punkten x_1 und x_2 $(x_1<x_2)$ schneidet, während die beiden anderen parallelen Seiten unendlich fern von der Axe liegen. Auf der untersten von diesen beiden ist $e^{2\pi i z}-1$ unendlich, der Bruch also Null, wenn wir voraussetzen, dass $\varphi(z)$ auf der erwähnten Seite entweder *endlich* ist oder *unendlich von niedrigerer Ordnung als der Nenner*. Auf dem Teile vom Umfange des Rechtecks, der über der Axe der reellen Zahlen liegt, geben wir dem Integral die Form

$$\int\frac{e^{2\pi i z}\varphi(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz-\int\varphi(z)\,dz.$$

Für das letzte Integral lässt sich der Weg zusammenziehen in die gerade Linie von x_2 nach x_1, vorausgesetzt, *dass $\varphi(z)$ keine Pole hat, die dabei passiert werden müssten;* für das erste Integral ist die Funktion unter dem Integralzeichen Null auf

Digitized by Google

der unendlich fernen Seite, ***wenn wir überall auf dieser vor-aussetzen, dass***

$$e^{2\pi i z}\varphi(z)=0.$$

Wir können also unter den genannten Voraussetzungen bei der Integration längs den Seiten des Rechtecks die beiden unendlich fernen Seiten unbeachtet lassen.

Nun können wir das gegebene Integral umwandeln in

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+i\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(x_2+iy)\,dy}{e^{2\pi i(x_2+iy)}-1}+i\int_{0}^{-\infty}\frac{\varphi(x_1+iy)\,dy}{e^{2\pi i(x_1+iy)}-1}$$

$$+\,i\int_{0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(x_2+iy)}\varphi(x_2+iy)\,dy}{e^{2\pi i(x_2+iy)}-1}+i\int_{\infty}^{0}\frac{e^{2\pi i(x_1+iy)}\varphi(x_1+iy)\,dy}{e^{2\pi i(x_1+iy)}-1}.$$

Wir setzen nun voraus, dass x_1 und x_2 *ganze Zahlen sind,* so dass

$$e^{2\pi i x_1}=e^{2\pi i x_2}=1.$$

Im zweiten und dritten Integral wird y mit $-y$ vertauscht, und man hat

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+i\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x_2-iy)\,dy}{e^{2\pi y}-1}-i\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x_1-iy)\,dy}{e^{2\pi y}-1}$$

$$+\,i\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x_2+iy)\,dy}{1-e^{2\pi y}}-i\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x_1+iy)\,dy}{1-e^{2\pi y}},$$

woraus durch ferneres Zusammenziehen

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int_{0}^{\infty}\frac{[\varphi(x+iy)-\varphi(x-iy)]_{x_1}^{x_2}\,dy}{e^{2\pi y}-1}.$$

Hier ist indessen ein Punkt, der eine genauere Untersuchung verlangt. Wir haben vorausgesetzt, dass x_1 eine ganze Zahl sei, aber das ist auf der Axe der reellen Zahlen nicht

Digitized by Google

zulässig, da alle ganzen Zahlen Pole sind. Wir wollen um den Pol x_1 einen unendlich kleinen Kreis mit dem Radius a beschreiben; die Funktion unter dem Integralzeichen in (16) hat auf diesem den Wert

$$\frac{\varphi(x_1)}{2\pi i a(\cos\theta + i\sin\theta)},$$

wenn wir unendlich kleine Glieder von höherer Ordnung fortlassen.

Man ersieht daraus, dass das Integral auf dem Kreise dem durchlaufenen Bogen proportional wird, und wir können deshalb annehmen, dass es einen Wert α hat, wenn wir abbiegen und den Halbkreis nach links durchlaufen, und den Wert $-\alpha$, wenn wir nach rechts abweichen. Nehmen wir an, dass $x_2 - x_1 < 1$, so enthält das Rechteck im ersten Falle den einen Pol x_1, während es im zweiten Falle keinen Pol enthält. Ist K der Wert des Integrals auf dem Umfange des ganzen Rechtecks mit Ausnahme des Stückes, das durch einen Halbkreis ersetzt ist, so muss man haben: $K + \alpha = \varphi(x_1)$ und $K - \alpha = 0$, mithin $K = \frac{1}{2}\varphi(x_1)$.

Das umgeformte Integral, das mit dem gegebenen auf dem Umfange des ganzen Rechtecks, ausgenommen in der Nähe des Poles, übereinstimmt, muss dann den Wert $K + \beta$ ergeben, wo β der Wert des Integrals auf dem Durchmesser des kleinen Kreises ist. Das umgeformte Integral hat jedoch keinen Pol in x_1, so dass $\beta = 0$. Ähnliche Betrachtungen gelten für den Punkt x_2, und wir sehen also, dass das erste und letzte Glied der Reihe mit $\frac{1}{2}$ zu multiplicieren ist. Mithin:

Sind x_1 und x_2 ganze Zahlen, so hat man

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1) + \varphi(x_1+1) + \varphi(x_1+2) + \ldots + \varphi(x_2-1) + \frac{1}{2}\varphi(x_2)$$

$$(18)\qquad = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\,dz + \frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{[\varphi(x+iy) - \varphi(x-iy)]_{x_1}^{x_2}\,dy}{e^{2\pi y} - 1},$$

wenn $\varphi(z)$ eindeutig und stetig ist für alle z, deren reeller Teil zwischen x_1 und x_2 liegt, und wenn, falls $\varphi(z)$ in diesem Intervall unendlich wird für einen unendlich wachsenden imaginären

Digitized by Google

Teil, dies dann so geschieht, dass $\lim e^{2\pi i z}\varphi(z)=0$ *für positive* y, *und* $\lim \frac{\varphi(z)}{e^{2\pi i z}-1}=0$ *für negative* y.

Man kann dem letzten Integral in (18) eine geometrische Bedeutung beilegen; das erste Integral ist gleich dem Inhalt des von der Abscissenaxe, der Kurve

$$y=\varphi(x)$$

und den Ordinaten von x_1 und x_2 begrenzten Flächenstückes, während die Summe auf der linken Seite die bei der Bildung einer bekannten Näherungsformel für den Flächeninhalt angewandte Flächensumme der einbeschriebenen Trapeze ausdrückt. Der Unterschied zwischen diesen beiden Inhalten wird von einer Reihe von Segmenten gebildet, und die Summe der Inhalte von diesen wird durch das letzte Integral ausgedrückt.

79. Man hat nun

$$\frac{1}{i}\Big[\varphi(x+iy)-\varphi(x-iy)\Big]_{x_1}^{x_2}$$
$$=2\left[\frac{1}{1}\Big(\varphi'(x_2)-\varphi'(x_1)\Big)y-\frac{1}{3!}\Big(\varphi'''(x_2)-\varphi'''(x_1)\Big)y^3+\dots\right]$$

und, nach einem Satze der Integralrechnung,

$$4n\int_0^\infty \frac{y^{2n-1}}{e^{2\pi y}-1}\,dy=B_{2n-1},$$

wo $B_1=\frac{1}{6}$, $B_3=\frac{1}{30}$, $B_5=\frac{1}{42}$, $B_7=\frac{1}{30}$, $B_9=\frac{5}{66}$, $B_{11}=\frac{691}{2730}$, $B_{13}=\frac{7}{6}$, $B_{15}=\frac{3617}{510}$ u. s. w. die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Dadurch erhält man (*Maclaurins* Summationsformel)

$$\text{(19)}\qquad \tfrac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\dots+\tfrac{1}{2}\varphi(x_2)$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\tfrac{1}{12}\big(\varphi'(x_2)-\varphi'(x_1)\big)-\tfrac{1}{720}\big(\varphi'''(x_2)-\varphi'''(x_1)\big)+\dots$$

Hierbei haben wir jedoch zu beachten, dass wir die Taylorsche Formel zur Entwickelung von $\varphi(x+iy)$ und $\varphi(x-iy)$

Digitized by Google

benutz haben, und dass diese Entwickelungen nur konvergente Reihen liefern, wenn ein Kreis um x als Mittelpunkt und mit y als Radius ganz innerhalb des Gebietes liegt, in dem $\varphi(z)$ eindeutig und stetig ist. Ist dies nicht der Fall, so muss man bei der Reihenentwickelung eine endliche Anzahl von Gliedern nehmen und das Restglied hinzufügen. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass $\varphi(z)$ nur einen singulären Punkt in $z = 0$ habe, und dass $x_1 = 1$. Die Glieder, die von x_1 herrühren, lassen sich in eine Konstante zusammenziehen, die sich, wenn die allgemeine Formel für ein willkürliches x_2 gebildet ist, durch Einzetzung von besonderen Werten für x_2 und direkte Summation bilden lässt. Setzen wir n für x_2, so haben wir also

$$(20) \qquad \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)$$
$$= C + \tfrac{1}{2}\varphi(n) + \int^n \varphi(z)\,dz + \frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\varphi(n+iy) - \varphi(n-iy)}{e^{2\pi y} - 1}\,dy.$$

Wir wollen nun *Taylors* Formel anwenden, wobei wir jedoch nur die ersten Glieder nehmen und darauf das Restglied bilden; es ergiebt sich, wenn θ einen echten Bruch bedeutet,

$$\frac{1}{i}\Big[\varphi(n+iy) - \varphi(n-iy)\Big] = \int_{-y}^{+y} \varphi'(n+iy)\,dy$$
$$= \int_{-y}^{+y}\left(\varphi'(n) + \varphi''(n)\frac{iy}{1} - \varphi'''(n+\theta iy)\frac{y^2}{1\cdot 2}\right)dy$$
$$= 2y\varphi'(n) - \frac{1}{2}\int_{-y}^{+y}\varphi'''(n+\theta iy)\,y^2\,dy.$$

Wir wollen hier annehmen, dass $|\varphi'''(n+\theta iy)|$ für alle reellen Werte von y eine gewisse Grösse m nicht übersteigt. Das letzte Integral hat dann einen Modulus, der kleiner ist als $\frac{1}{3}my^3$. Setzen wir das gefundene Resultat oben in das Integral ein, so erhalten wir

Digitized by Google

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)$$
$$=C+\int^n\varphi(z)\,dz+\frac{1}{2}\varphi(n)+\frac{1}{12}\varphi'(n)-\frac{\theta}{720}m,$$

wo θ einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet.

Beisp. 1. $\varphi(n)=n^3$. Wir wenden hier am besten (18) an und erhalten

$$1+2^3+3^3+\ldots+n^3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n^3+\left(\frac{n^4}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}(n^2-1)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Beisp. 2. $\varphi(n)=\frac{1}{n}$; $\varphi'(n)=-\frac{1}{n^2}$; $\varphi'''n=-\frac{6}{n^4}$; $m=\frac{6}{n^4}$; mithin

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+ln+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2};$$

(der Fehler ist kleiner als $\frac{1}{120n^4}$.)

C ist die sogenannte *Eulersche* Konstante; man bestimmt sie durch wirkliche Summation der Reihe für einen grossen Wert von n und Vergleichung mit der Formel; dadurch hat man gefunden

$$C=0{,}5772156649015328\ldots$$

Beisp. 3. $\varphi(n)=\frac{1}{n^2}$. $m=\frac{24}{n^5}$. Man erhält

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=1{,}644934\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}.$$

(Der Fehler ist kleiner als $\frac{1}{30n^5}$.) Die Konstante ist gleich $\frac{1}{6}\pi^2$.

Beisp. 4. $\varphi(n)=ln$; $m=\frac{2}{n^3}$. Man erhält

$$l(1.2.3\ldots n)=C_1+nln-n+\frac{1}{2}ln+\frac{1}{12n};$$

(F. $<\frac{1}{360n^3}$.)

Hier kann man eine genaue Bestimmung der Konstante erhalten. Man hat nämlich (*Wallis* Formel):

Digitized by Google

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \ldots \quad 2q \quad \cdot \quad 2q}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2q-1)(2q+1)}$$
$$= \lim \frac{1}{2q+1} \left(\frac{2 \cdot 4 \ldots \quad 2q}{1 \cdot 3 \ldots (2q-1)} \right)^2 = \lim \frac{1}{2q+1} \left(\frac{2^{2q} (q!)^2}{(2q)!} \right)^2$$

oder

$$l \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim \left[2q l 2 + 2 l q! - l(2q)! - \tfrac{1}{2} l (2q+1) \right]$$
$$= \lim \left[2q l 2 + 2 (C_1 + q l q - q + \tfrac{1}{2} l q) - (C_1 + 2q l (2q) - 2q + \tfrac{1}{2} l (2q)) - \tfrac{1}{2} l (2q+1) \right],$$

wenn die gegen Null konvergierenden Glieder ausgelassen werden; hieraus erhält man

$$l \sqrt{\frac{\pi}{2}} = C_1 + \lim (l q - \tfrac{1}{2} l 2q (2q+1)) = C_1 - l 2;$$
$$C_1 = \tfrac{1}{2} l (2\pi).$$

Die Formel wird also

$$l (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n) = \frac{1}{2} l (2\pi) + \left(n + \frac{1}{2} \right) l n - n + \frac{1}{12 n}.$$

80. Wir haben vorausgesetzt, das $\varphi(z)$ stetig sei im Intervall zwischen den beiden Parallelen; ist das nicht der Fall, so haben wir auch die von $\varphi(z)$ herrührenden Pole zu berücksichtigen. Angenommen z. B., es sei

$$\varphi(z) = \frac{2t}{t^2 - z^2},$$

sowie $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$, t beliebig. Das Restintegral fällt fort, da die Funktion unter dem Integralzeichen Null wird sowohl für $x_1 = 0$ als für $x_2 = \infty$. Man erhält dann zuerst

$$\frac{1}{t} + 2t \left(\frac{1}{t^2 - 1^2} + \frac{1}{t^2 - 2^2} + \ldots \right),$$

herrührend von den Polen 0, 1, 2 ... Von den beiden Polen $\pm t$ liegt der eine in unserem Flächenstück; dieser sei t; das entsprechende Residuum ist

$$\frac{-1}{e^{2\pi i t} - 1},$$

Digitized by Google

so dass wir dadurch das Glied

$$-\pi i \frac{2}{e^{2\pi i t}-1}$$

erhalten. Auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens haben wir

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{z+t}-\frac{1}{z-t}\right)dz = \left[l\frac{z+t}{z-t}\right]_0^\infty.$$

Wir erhalten hier das Resultat $(2p+1)\pi i$, aber die Frage ist, welchen von den Werten wir benutzen sollen; das ergiebt sich nun daraus, dass $(2p+1)\pi$ den Zuwachs darstellt, den das Argument des Bruches erfährt, wenn z reell von 0 nach ∞ übergeht. Nun ist das Argument der Winkel von $z-t$ nach $z+t$, und dieser Winkel wächst von $-\pi$ bis 0, wenn t unter der Axe der reellen Zahlen liegt. Wir erhalten dann πi als Wert des Integrals. Liegt t dagegen über der Axe der reellen Zahlen, so erhalten wir $-\pi i$, müssen aber hierzu $2\pi i$ addieren, da der geradlinige Weg des Integrals entstanden ist durch Zusammenziehen einer Kurve, die bei diesem Zusammenziehen den Punkt t passiert. Wir erhalten also in allen Fällen

$$\frac{1}{t}+2t\left(\frac{1}{t^2-1^2}+\frac{1}{t^2-2^2}+\dots\right)=\pi i\left(1+\frac{1}{e^{2\pi i t}-1}\right)=\pi\cot\pi t..$$

Multiplicieren wir mit dt und integrieren, so erhalten wir die früher (S. 150) erwähnte *Eulersche* Formel

$$\sin\pi t=\pi t\left(1-\frac{t^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{2^2}\right)\dots\left(1-\frac{t^2}{p^2}\right)\dots,$$

wo die Konstante dadurch bestimmt ist, dass $t=\frac{1}{2}$ gesetzt und *Wallis* Ausdruck für $\frac{\pi}{2}$ benutzt wurde.

Digitized by Google

KAPITEL IX.

ANDERE ANWENDUNGEN VON CAUCHYS INTEGRAL.

NULLPUNKTE UND POLE.

Wir wollen annehmen, wir hätten einen Punkt a, in dessen Umgebung die Funktion $f(z)$ eindeutig und stetig ist. Die Funktion lässt sich dann in einer für ein gewisses Gebiet geltenden Reihe nach Potenzen von $z-a$ entwickeln. Ist nun a ein Nullpunkt, so dass $f(a)=0$, so lässt sich die Reihe darstellen als

$$f(z)=(z-a)(f'(a)+\tfrac{1}{2}f''(a)(z-a)+\ldots).$$

Nun kann es sich jedoch ereignen, dass auch $f'(a)$, $f''(a)\ldots f^{(k-1)}(a)$ Null sind. Dann wird die Reihe

$$(1)\quad f(z)=(z-a)^k\left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a)(z-a)+\ldots\right).$$

Wenn wir voraussetzen, dass $f^{(k)}(a)$ nicht Null ist, so sagen wir, dass die Funktion *k mal Nul* wird im Punkte a, oder dass *a ein Nullpunkt von der Ordnung k* ist. k muss notwendigerweise eine endliche Zahl sein, denn wenn alle Abgeleiteten Null wären, so würde man $f(z)=0$ innerhalb des ganzen Konvergenzgebietes haben, und wir werden gleich zeigen, dass das nicht der Fall sein kann, es sei denn, dass die Funktion in der ganzen Ebene eine Konstante mit dem Werte Null wäre.

Nun sei a ein Pol, der nicht zugleich Verzweigungspunkt ist; der reciproke Wert der Funktion muss dann in a einen Nullpunkt haben und eindeutig und stetig in der Umgegend von a sein. Ist a $k$mal Nullpunkt, so muss man also haben

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^k\varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ weder Null noch unendlich in a wird und eindeutig

Digitized by Google

und stetig in der Umgegend von a ist; dasselbe muss dann für den reciproken Wert von $\varphi(z)$ gelten, und wir können setzen

$$\frac{1}{\varphi(z)} = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,$$

wo A_0 nicht Null ist; hieraus folgt

$$(2) \quad f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^k} + \frac{A_1}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{z-a} + A_k + A_{k+1}(z-a) + \ldots$$

Wir sagen vom Punkte a, dass die Funktion in ihm *kmal unendlich* wird, oder dass *a ein Pol von der Ordnung k* ist. *Eine Funktion kann also in einem Pole nur eine endliche Anzahl Male unendlich werden,* und in der Reihenentwickelung vom Pole aus, wenn dieser kein Verzweigungspunkt ist, können nur ganze Exponenten vorkommen, von denen der kleinste $-k$ ist. Kommen in der Reihenentwickelung von a aus unendlich grosse negative Exponenten vor, so muss a ein wesentlich singulärer Punkt sein, und umgekehrt.

Ist a ein Verzweigungspunkt, in dem p Blätter zusammenhängen, so kann man eine neue Unabhängige durch die Substitution

$$z - a = (\xi - a)^p$$

einführen.

In der ξ-Ebene wird die Funktion dann eindeutig in der Umgegend von a, und man kann sie in einer Reihe mit ganzen Exponenten nach Potenzen von $\xi - a$ entwickelen, worauf $\xi - a$ durch $(z-a)^{\frac{1}{p}}$ ersetzt wird. Die k entsprechende Zahl wird hier dann $\frac{k}{p}$. Man pflegt zu sagen, dass die Funktion $\frac{k}{p}$ Mal Null oder unendlich in jedem der p Blätter wird, und deshalb $k$mal Null oder unendlich im Punkte a.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass die *Riemann*sche Fläche nur p in a zusammenhängende Blätter habe; sind mehr Blätter vorhanden, so gehören zum Punkte a mehr Reihenentwickelungen, von denen jede ein System von Funktionswerten bestimmt, die cyklisch verschoben werden, wenn z eine

Digitized by Google

scheinbar geschlossene Kurve um a in den der Reihe entsprechenden zusammenhängenden Blättern beschreibt.

82. Für eine eindeutige Funktion, die $k$mal Null in a wird, fanden wir

$$f(z) = (z-a)^k (A_0 + A_1(z-a) + \ldots),$$

während wir, wenn a ein Pol von der Ordnung k ist, erhalten

$$f(z) = (z-a)^{-k} (B_0 + B_1(z-a) + \ldots),$$

wo in beiden Fällen die Reihe in der Klammer weder Null noch unendlich im Punkte a wird. Durch Differentiation dieser Gleichungen erkennen wir die Richtigkeit folgendes Satzes:

Wird eine eindeutige Funktion kmal Null in einem Punkte a, so wird ihre Abgeleitete (k — 1) mal Null in demselben Punkt; ist die Funktion kmal unendlich, so wird ihre Abgeleitete (k + 1) mal unendlich. Wo die Funktion endlich ist, ist die Abgeleitete es auch.

Nun sei $f(z)$ eindeutig in einem gewissen einfach zusammenhängenden Flächenstück, das keine wesentlich singulären Punkte enthält. Wir wollen dann das Integral

$$\int dl f(z),$$

genommen in positiver Richtung längs der Begrenzung des Flächenstücks, untersuchen. Da $lf(z)$ nur da unendlich ist, wo $f(z)$ Nullpunkte oder Pole hat, so ist der Wert des Integrals gleich der Summe der Werte, die wir erhalten, wenn wir längs kleinen Kreisen um diese Punkte integrieren. Ist nun a ein Nullpunkt, so ist

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z),$$

mithin

$$lf(z) = kl(z-a) + l\varphi(z);$$

das letzte Glied ist stetig in a; wir haben deshalb nur

$$k\int dl(z-a) = k\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i k.$$

Digitized by Google

Ist a ein Pol, so besteht der Unterschied nur darin, dass wir $-2\pi i k$ erhalten. Ist n die Anzahl Male, welche die Funktion im ganzen Flächenstück Null wird, vermindert um die Anzahl Male, welche sie unendlich wird, so ist der Wert des Integrals also $2\pi i n$.

Der Satz gilt auch für mehrdeutige Funktionen; ist a Nullpunkt oder Pol und zugleich ein Verzweigungspunkt, in dem p Blätter zusammenhängen, so erhält man oben $\frac{k}{p}$ anstatt k, aber das Integral muss dann, um eine wirklich geschlossene Kurve zu durchlaufen, $p$mal um den Punkt geführt werden, so dass das Schlussresultat unverändert bleibt.

Man sagt, das eine Funktion in einem gewissen Punkte unendlich wird *auf dieselbe Weise* wie eine andere Funktion, wenn der Unterschied der beiden Funktionen im Punkte endlich ist; die notwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist, dass diejenigen Teile der Reihenentwickelungen vom Punkte aus, die Glieder mit negativen Exponenten enthalten, identisch sind.

Die obenstehenden Entwickelungen gelten auch für $a=\infty$; nur hat man, wie früher gezeigt, zu beachten, dass $z-a$ mit $\frac{1}{z}$ vertauscht werden muss. Ist die Funktion $k$mal Null oder unendlich in dem Punkte, so erhalten wir also beziehungsweise

$$f(z)=z^{-k}(A_0+A_1z^{-1}+A_2z^{-2}+\ldots)$$

oder

$$f(z)=z^{k}(B_0+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}+\ldots).$$

Die letzte Reihe gilt für die ganze Ebene, wenn die Funktion nur den einen Pol ∞ hat. Da die Funktion keinen singulären Punkt in $z=0$ hat, so muss B_{k+1} und alle folgenden Koefficienten Null werden, und man hat

$$f(z)=B_0z^k+B_1z^{k-1}+\ldots+B_k.$$

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Eine Funktion, die in der ganzen Ebene eindeutig und endlich ist, und die im Punkte ∞ einen Pol von der Ordnung

Digitized by Google

k hat, ist eine rationale ganze Funktion vom Grade k; ist $k = 0$, so dass die Funktion auf der ganzen Kugel nicht unendlich werden kann, so muss sie konstant sein.

Kann der Modulus der Funktion in der ganzen Ebene eine gewisse endliche Grösse nicht übersteigen, so gilt dasselbe für die ganze Kugel, und die Funktion ist eine Konstante.

83. Hat die Funktion keine wesentlich singulären Punkte, sondern eine endliche Anzahl Pole $a_1, a_2 \dots a_n$, die beziehungsweise von den Ordnungen $k_1, k_2 \dots k_n$ sind, so erhält man durch Multiplikation mit

$$(z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} \dots (z - a_n)^{k_n}$$

eine Funktion, die stetig in der ganzen Ebene ist. Ist sie nun zugleich $k$mal unendlich im Punkte ∞, so wird sie ein Polynom vom Grade k sein. Mithin:

Eine eindeutige Funktion, die auf der ganzen Kugel nur Pole hat, ist eine rationale Funktion.

Wir brauchen nicht hinzuzufügen, dass die Pole in endlicher Anzahl vorhanden sein müssen; sind nämlich uendlich viele Pole da, und teilen wir die Kugelfläche in eine endliche Anzahl Teile, so müssen, wie gross auch die Anzahl sein mag, wenigstens in einem der Teile unendlich viele Pole liegen; es muss also Punkte geben, in deren Nähe unendlich viele Pole liegen, aber solche Punkte sind wesentlich singuläre Punkte. So hat $\operatorname{sn} z$ zwei Pole in jedem Periodenparallelogram; hier giebt es in der Ebene unendlich viele wohl getrennte Pole, und der wesentlich singuläre Punkt tritt nicht deutlich hervor. Beim Übergange zur Kugel dagegen schaaren sich die Pole unendlich dicht um den Punkt ∞, der der einzige wesentlich singuläre Punkt der Funktion ist.

Wir haben früher bewiesen, dass eine rationale Funktion auf der ganzen Kugel gleich oft Null und unendlich wird. Das folgt auch leicht aus dem oben bewiesenen Satz über $\int dlf(z)$. Längs einem kleinen Kreise genommen, der keinen von den Nullpunkten oder Polen der Funktion einschliesst, ist das Integral Null. Dieser Kreis begrenzt indessen auch den übrigen

Digitized by Google

Teil der Kugelfläche, und dieser enthält alle Nullpunkte und Pole; für diesen Teil ist also die Differenz, die wir mit n bezeichneten, Null, und dadurch wird eben der angeführte Satz ausgedrückt.

Es sei $f(z)$ eine Funktion, die eindeutig und stetig in der ganzen Ebene ist, und die im Punkte ∞ einen gewissen Wert a nicht annehmen kann. Die Funktion

$$\frac{1}{z(f(z)-a)}$$

ist dann Null im Punkte ∞, so dass dieser ein Pol für $z(f(z)-a)$ ist; daraus folgt, dass $f(z)$ eine rationale Funktion ist. Hieraus ersehen wir, dass *eine transcendente Funktion, die eindeutig und stetig in der ganzen Ebene ist, alle Werte im Punkte ∞ haben muss.*

84. *Eine Funktion, die auf einer n blättrigen Riemannschen Kugelfläche keine anderen singulären Punkte hat als Verzweigungspunkte und Pole, ist eine algebraische Funktion, bestimmt durch eine Gleichung n ten Grades mit rationalen Koefficienten.*

Für einen willkürlichen nicht singulären Wert von z seien die Werte der Funktion in den n Blättern $u_1, u_2 \dots u_n$; wir wollen dann den Ausdruck

$$S = (s - u_1)(s - u_2) \dots (s - u_n)$$

betrachten, wo der Buchstabe s eine nicht näher bestimmte Grösse bezeichnet. Lassen wir z einen beliebigen, scheinbar geschlossenen Weg beschreiben, so werden die verschiedenen Werte von u unter einander vertauscht, aber S behält wegen der Symmetrie seinen Wert. S kann nur in den Polen der Funktion unendlich werden, und in diesen nur eine endliche Anzahl Male. S ist also eindeutig auf der ganzen Kugel und hat keine wesentlich singulären Punkte. Nach 83 muss S dann eine rationale Funktion von z sein; ordnet man diese nach dem Buchstaben s, so erhält man einen Ausdruck, der vom n ten Grade in s ist, und dessen Koefficienten rationale Funktionen von z sind. Dadurch ist der Satz bewiesen, denn $S = 0$ bestimmt die n Werte der Funktion.

Digitized by Google

Wir können leicht den Faktor finden, mit dem wir die Gleichung multiplicieren müssen, um sie auf ganze Form zu bringen; ist nämlich a ein Pol von der Ordnung α für u_1, so wird

$$(s-u_1)(z-a)^\alpha$$

im Punkte a endlich werden; ist b ein Pol von der Ordnung β und zugleich Verzweigungspunkt für $u_1, u_2 \ldots u_p$, so wird

$$(s-u_1)(s-u_2)\ldots(s-u_p)(z-b)^\beta$$

im Punkte b endlich werden. Wir ersehen daraus, dass wir, wenn S mit einem passenden durch die Pole bestimmten Ausdruck von der Form $(z-a)^\alpha(z-b)^\beta \ldots$ multipliciert wird, ein neues Polynom erhalten, dass in keinem der Pole unendlich wird und deshalb Koefficienten haben muss, die ganze Funktionen von z sind.

85. *Eine Funktion, die konstant ist auf einem noch zo kleinen endlichen Kurvenstücke, das innerhalb der Begrenzung eines Flächenstückes, in dem die Funktion eindeutig und stetig ist, belegen ist, hat überall denselben konstanten Wert.*

Wir können nämlich die Funktion in einer innerhalb eines gewissen Kreises gültigen Potenzreihe von einem Punkte der Kurve aus entwickeln; die Kurve ist ausreichend für die Bestimmung aller Differentialquotienten, und diese werden alle Null, da die Funktion konstant auf der Kurve ist. Die Reihe wird also auf ihr konstantes Glied reduciert, und die Funktion ist deshalb konstant innerhalb des ganzen Kreises. Von diesem aus lässt sie sich nun durch neue Potenzreihen erweitern, und da diese alle auf ihre konstanten Glieder reduciert werden, so erhält die Funktion den konstanten Wert so weit wie die Erweiterung sich führen lässt. Diese kann nicht zu einem Verzweigungspunkt führen, denn in der Nähe eines solchen muss die Funktion mehrere Werte haben; sie kann auch nicht zu einem Pol oder einem wesentlich singulären Punkt führen, denn in der Nähe von solchen muss der Wert der Funktion entweder so gross sein wie man will, oder unbestimmt. Dagegen kann es als möglich erscheinen, dass die Erweiterung

Digitized by Google

verhindert wird durch eine geschlossene Kurve, die sich nicht überschreiten lässt. Wir haben diesen Fall in der That bei dem *Cauchy*schen Integral getroffen, das den Wert Null ausserhalb der Randkurve erhielt. Nun haben wir jedoch unseren Funktionsbegriff derartig bestimmt, das eine innerhalb eines gewissen Flächenstückes definierte monogene Funktion immer um so viel erweitert gedacht werden soll, als sich überhaupt thun lässt ohne die Monogenität (einzelne Punkte ausgenommen) zu zerstören, gleichgültig durch welche Mittel die Erweiterung geschieht. Man braucht sich, wie früher erwähnt, nicht einmal zu denken, dass die Erweiterung durch Reihen oder Integrale oder andere analytische Mittel geschieht. Wenn also *Cauchys* Integral uns eine Funktion als konstant ausserhalb der Begrenzung des Flächenstücks definiert hat, so können wir selbst der Funktion denselben konstanten Wert in dem übrigen Teil der Ebene geben; dadurch haben wir sie auf die ganze Ebene erweitert ohne die Monogenität dadurch aufzuheben. Ziehen wir die Randkurve des Flächenstücks zusammen, so erhalten wir dieselbe Erweiterung. Deshalb müssen wir sagen, das *Cauchys* Integral zwei verschiedene Funktionen definiert, eine ausserhalb und eine innerhalb der Randkurve. Von diesen lässt die erste sich auf die ganze Ebene erweitern, während das bei der letzten nicht der Fall zu sein braucht.

86. *Wenn zwei Funktionen auf einem noch so kleinen endlichen Kurvenstück übereinstimmen, das innerhalb der Begrenzung eines Flächenstücks liegt, in welchem sie beide eindeutig und stetig sind, so sind die Funktionen identisch.*

Die Differenz zwischen den beiden Funktionen hat den Wert Null auf dem kleinen Kurvenstück und deshalb auch in jedem Flächenstück, auf das die beiden Funktionen sich erweitern lassen. Es ist unmöglich, dass die eine sich auf ein gewisses Flächenstück erweitern lässt, und die andere nicht, denn in diesem Falle würde die Erweiterung der ersten auch für die zweite gelten. Der Satz gilt deshalb in einem Flächenstück, in dem beide Funktionen definiert sind und ausserhalb dessen keine von ihnen Bedeutung hat.

Man kann sagen, dass dieser von *Riemann* aufgestellte Satz

Digitized by Google

die Grundlage für die ganze Funktionstheorie bildet, da nur er allein die Möglichkeit eines scharf begrenzten Funktionsbegriffes zeigt. Er zeigt, dass eine Funktion nur für ein noch so kleines Kurvenstück definiert zu sein braucht, um dadurch vollkommen bestimmt zu sein.

87. In der positiven Halbebene denken wir uns ein Flächenstück T_1, zu dessen Begrenzung ein Stück l von der Axe der reellen Zahlen gehört. Eine Funktion $w = f(z)$ wird als stetig und eindeutig im Flächenstück und auf dessen ganzer Begrenzung gedacht, wobei ihre Werte auf l reel sind.

T_2 sei das Flächenstück, das symmetrisch zu T_1 mit Bezug auf die Axe liegt. Lassen wir konjugierten Werten von z konjugierte Funktionswerte entsprechen, so erhalten wir eine in T_2 eindeutige und stetige Funktion bestimmt. *H. A. Schwarz hat bewiesen, dass diese die Fortsetzung von $f(z)$ über l hinaus darstellt.* (Erweiterung durch Spiegelung).

Um das zu zeigen, betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,$$

wo das Integral positiv längs dem Rande des gesammten Flächenstücks $T_1 + T_2$ zu nehmen ist, und wo $\varphi(t)$ die Randwerte von $f(z)$ in der positiven Halbebene, und die konjugierten Werte in der negativen Halbebene bezeichnet. Der Ausdruck definiert, wie man leicht erkennt, eine im Flächenstück $T_1 + T_2$ monogene, eindeutige und stetige Funktion. Von dieser lässt sich zeigen, das sie in T_1 mit w zusammenfällt, und dadurch ist der Satz bewiesen.

Wir können nämlich das Integral in zwei andere zerlegen, von denen das eine positiv um T_1, das andere positiv um T_2 herumgeführt wird; dabei wird nämlich l, worauf die beiden Funktionen denselben Wert haben, zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Ist z ein Punkt in T_1, so erhält nach *Cauchys* Satz das erste Integral den Wert $f(z)$, während das andere, da z ausserhalb T_2 liegt, den Wert Null erhält. Die Summe der beiden Integrale ist also $f(z)$.

Digitized by Google

88. Wir können den Begriff Spiegelung erweitern, indem wir die Ebene einer beliebigen konformen Abbildung unterwerfen; dadurch wird die Axe der reellen Zahlen als eine gewisse Kurve abgebildet, und die Bilder von zwei konjugierten Punkten heissen dann die Spiegelbilder von einander mit Bezug auf diese Kurve. Besonderes Interesse hat der Fall, wo die Ebene durch eine lineare Transformation abgebildet wird. Die Axe wird dadurch als ein Kreis abgebildet; ist z ein Punkt in der Ebene, so wird der konjugierte Punkt als Schnittpunkt von zwei Kreisen bestimmt, die durch z gehen und die Axe unter rechten Winkeln schneiden. Da Kreise als Kreise abgebildet werden und die Winkel unverändert bleiben, so lässt sich dieselbe Konstruktion auf das Bild anwenden. Als den einen Kreis kann man den Radius durch den Punkt benutzen; da der andere den Radius zu einem von seinen Schnittpunkten mit dem Bild der Axe berühren muss, so wird der Radius dieses Bildes die mittlere Proportionale zwischen den Abständen seines Mittelpunktes von den beiden Punkten, die Spiegelbilder von einander sind. Dieses Resultat lässt sich folgendermassen aussprechen:

Das Spiegelbild eines Punktes mit Bezug auf einen Kreis findet man durch eine Inversion, für welche der Mittelpunkt des Kreises Inversionscentrum ist, und die keine von den Punkten der Kreisperipherie verlegt.

89. *Ist $f(z)$ eine in der ganzen Ebene eindeutige und stetige Funktion, und haben die Gleichungen $f(z) = a$ und $f(z) = b$, wo a und b zwei endliche Grössen bedeuten, keine endlichen Wurzeln, so ist $f(z)$ konstant. (Picard.)*

Um diesen Satz beweisen zu können, müssen wir einige Bemerkungen über die elliptischen Modulfunktionen, die später erwähnt werden sollen, vorausschicken.

Bei dem ersten elliptischen Integral ist das Verhältnis $K':K$ eine unendlichdeutige Funktion von k^2, die wir durch $M(k^2)$ bezeichnen wollen. Die Funktion hat nur Verzweigungspunkte in $k^2 = 0$, 1 und ∞, und ist deshalb eindeutig und stetig innerhalb jeder geschlossenen Kurve, die nicht einen von den

Digitized by Google

Punkten 0 und 1 einschliesst. Die Funktion kann ferner für beliebige Werte von k^2 nur Werte annehmen, deren reeller Teil positiv ist.

Setzen wir nun

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - a}{b - a},$$

so ist $\varphi(z)$ eindeutig und stetig in der ganzen Ebene und kann die Werte 0 und 1 nicht annehmen. Die Funktion $M(\varphi(z))$ ist also eine Funktion, die eindeutig und stetig in der ganzen Ebene ist, und die nur Werte annehmen kann, deren reeller Teil positiv ist. Die Funktion $e^{-M(\varphi(z))}$ ist dann auch eindeutig und stetig in der ganzen Ebene und hat Werte, deren Modulus den Wert 1 nicht übersteigen kann. Eine solche Funktion ist jedoch eine Konstante (82), und das ist wieder nur möglich, wenn $f(z)$ eine Konstante ist.

Picard hat seinen Satz zu dem folgenden erweitert, dessen Beweis wir erst später geben können, da er genauere Bekanntschaft mit der Theorie der Modulfunktionen voraussetzt:

Wenn unter den angeführten Bedingungen die beiden Gleichungen $f(z) = a$ und $f(z) = b$ nur eine endliche Anzahl endlicher Lösungen besitzen, so ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion[1]).

90. *Zeichnen wir um einen wesentlich singulären Punkt als Mittelpunkt einen Kreis, so nimmt die Funktion innerhalb der Kreisperipherie alle möglichen Werte und jeden von ihnen unendlich oft an, wie klein auch der Radius des Kreises sein mag.*

Es sei $f(z)$ eine ganze transcendente Funktion, so dass der Punkt ∞ der einzige singuläre Punkt ist. Nach den Sätzen von *Picard* hat die Gleichung $f(z) = a$ für jeden Wert von a, vielleicht mit Ausnahme eines einzigen, unendlich viele Wurzeln. Wie wir bewiesen haben, bringt dies mit sich, dass die Moduln der Wurzeln über jede Grenze hinaus wachsen müssen; es müssen also Wurzeln, und zwar unendlich viele, innerhalb der Peripherie des kleinen Kreises vorkommen. Für den Ausnahmewert von a, der möglicherweise vorkommt, werden alle Wur-

[1]) Annales de l'École normale, 2. série, IX.

Digitized by Google

zeln unendlich. Die Funktion nimmt also innerhalb der Kreisperipherie alle Werte, und zwar unendlich oft an.

Wir haben bewiesen, dass jede eindeutige Funktion sich auf eine für die ganze Ebene gültige Weise durch eine Summe von Reihen ausdrücken lässt; ist a ein wesentlich singulärer Punkt, so wird eine von den Reihen nach Potenzen von $\frac{1}{z-a}$ fortschreiten, und wenn wir den Punkt a untersuchen wollen, so können wir uns damit begnügen diese Reihe zu betrachten, da der übrige Teil der Funktion für $z = a$ den einen oder anderen konstanten Wert annimmt. Nun stellt die Reihe eine ganze transcendente Funktion von $\frac{1}{z-a}$ dar, und die Funktion nimmt deshalb alle möglichen Werte an in der Nähe von $\frac{1}{z-a} = \infty$ oder in der Nähe von $z = a$. Eine specielle Form dieses Satzes wurde oben S. 175 bewiesen.

91. *Ist $f(t) = A + iB$, so können die reellen Funktionen A und B kein Maximum oder Minimum in einem Flächenstück haben, in dem $f(t)$ eindeutig und stetig ist.*

Setzt man nämlich in dem Integral von *Cauchy*

$$z - t = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wo r konstant ist, so erhält man, wenn $f(t + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = u + iv$,

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\varphi;\quad B = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi;$$

hieraus geht hervor, dass für jeden Punkt t des Flächenstücks A der Mittelwert ist von den Werten, welche der reelle Teil von $f(z)$ annimmt auf einem Kreise mit t als Mittelpunkt. Wir können uns den Radius dieses Kreises unendlich klein denken und sehen dann, dass A nicht grösser oder kleiner sein kann als alle Werte des reellen Teils in den Nachbarpunkten. Eine ähnliche Betrachtung gilt für B.

Hieraus folgt, dass die Funktionen A und B, wenn sie nicht konstant sind, nicht ihren grössten oder kleinsten Wert

Digitized by Google

in einem von den inneren Punkten des Flächenstücks haben können; diese Werte müssen sich deshalb auf der Begrenzung des Flächenstückes finden. Hat eine von den Funktionen auf der ganzen Begrenzung einen bestimmten konstanten Wert, so muss sie also denselben Wert im ganzen Flächenstück haben. Dass dieser Satz mit Vorsicht zu benutzen ist, zeigt die Funktion $\frac{1-z}{1+z}$; diese liefert

$$A = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2};$$

hier ist $A = 0$ auf der ganzen Peripherie des Kreises $x^2+y^2=1$, ausgenommen im Punkte $(-1, 0)$, wo der Wert unbestimmt ist.

ANALYTISCHE FUNKTIONEN.

92. Im Vorhergehenden sind wir dem hauptsächlich von *Cauchy* und *Riemann* begründeten Wege in der Funktionstheorie gefolgt. Wir haben uns dadurch einen Funktionsbegriff gebildet, der, wenn er auch zu den in der Analysis gewöhnlich behandelten Funktionen stimmt, dennoch unabhängig von jedem analytischen Ausdruck ist. Wir können uns, wie früher erwähnt, denken, dass wir in einem kleinen Flächenstück auf die eine oder andere Weise jeden Punkt z_i mit einem entsprechenden Werte φ_i versehen; dadurch wird in der Regel keine monogene Funktion bestimmt sein; sind aber die Werte φ so beschaffen, dass

$$\frac{\varphi-\varphi_i}{z-z_i}$$

denselben Wert erhält, einerlei wie z_i sich z nähert, so ist eine Funktion dadurch vollständig bestimmt mit allen ihren Verzweigungspunkten, Polen und wesentlich singulären Punkten. Wir haben bewiesen, dass eine solche Funktion sich von jedem nicht singulären Punkte aus in einer Potenzreihe mit ganzen Exponenten entwickeln lässt, die innerhalb einer gewissen Kreisperipherie gültig ist.

Weierstrass geht den entgegengesetzten Weg; er beginnt

Digitized by Google

mit der Potenzreihe als Definition für eine Funktion innerhalb des Konvergenzkreises. Er nennt die Funktion *analytisch* und die Reihe ein *Funktionselement.* Durch Hinzufügung von neuen Reihen wird die Funktion so viel wie möglich erweitert (analytische Fortsetzung der Funktion). Der *Stetigkeitsbereich* der Funktion begreift alle diejenigen Punkte in sich, von denen aus sie in einer, in der Umgebung des Punktes geltenden Potenzreihe entwickelt werden kann. Der Stetigkeitsbereich der Funktion wird von den singulären Punkten begrenzt, die einzeln vorkommen können oder geschlossene Kurven bilden. Da eine Potenzreihe, wie wir bewiesen haben, eine monogene Funktion definiert, und jede monogene Funktion in einer Potenzreihe von jedem nicht singulären Punkte aus entwickelt werden kann, so decken sich die Begriffe monogen und analytisch.

93. Während die Erweiterung einer Funktion durch Potenzreihen in theoretischer Beziehung genügt, so sind jedoch in speciellen Fällen andere Entwickelungsmethoden sehr oft bequemer, und *Riemanns* Satz, dass eine für ein gewisses Flächenstück definierte Funktion nur eine einzige Fortsetzung hat, ein Satz, der wiederum eine unmittelbare Folge des *Cauchy*schen Integrales ist, muss deshalb immer einer von den Hauptsätzen der Funktionstheorie bleiben. Als Anwendung wollen wir den versprochenen Beweis geben für *Schwarz'* Satz über Funktionen, die Additionstheoreme haben.

Bezeichnet u wie früher das *Abel*sche Integral, genommen bis zum Punkte (z, s), so können wir setzen

$$s = \varphi(u); \; z = \psi(u),$$

wo $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ Potenzreihen bedeuten, die jedenfalls für Punkte u gelten, die innerhalb einer Kreisperipherie liegen mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt und einem gewissen Radius α. Nun haben wir bewiesen, dass man Summe und Produkt zweier Reihen, die unbedingt konvergent in einem gewissen Kreise sind, als Reihen darstellen kann, die unbedingt konvergent in demselben Kreise sind; wir können mit anderen Worten $\varphi(2u)$ und $\psi(2u)$ als Brüche darstellen, deren Zähler und Nenner Potenzreihen sind, die nach Potenzen von u fortschreiten und



Digitized by Google

im Kreise mit dem Radius a konvergent sind. Setzen wir nun überall $\frac{1}{2}u$ an die Stelle von u, so erhalten wir Ausdrücke für $\varphi(u)$ und $\psi(u)$, und zwar Brüche, deren Zähler und Nenner Potenzreihen sind, deren Konvergenzkreis den Radius $2a$ hat. Wenn wir auf dieselbe Weise fortfahren, so erhalten wir s und z als Funktionen von u eindeutig definiert in der ganzen Ebene; das ist aber nur möglich, wenn das Integral u auf einer Kurve vom Geschlechte 0 oder 1 genommen ist (47). Die Erweiterung ist hier, wie man sieht, nicht direkt durch neue Potenzreihen ausgeführt, sondern durch Brüche, deren Zähler und Nenner solche Reihen sind.

Als ein zweites Beispiel können wir die Funktion $\Gamma(z)$ nehmen. Diese wird wie bekannt im allgemeinen definiert durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx,$$

aber diese Definition hat nur Sinn, wenn der reelle Teil von z positiv ist.

Setzt man dagegen mit *Gauss*

$$\Gamma(z) = \lim \frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}, \quad (n=\infty)$$

so erhält man $\Gamma(z)$ als eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion definiert. Dass sie, wenn der reelle Teil von z positiv ist, mit dem obengenannten Integral zusammen fällt, erkennt man leicht, wenn man in der Formel

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots \; n}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

x durch $\frac{x}{n}$ ersetzt und n bis ins Unendliche wachsen lässt.


Digitized by Google

KAPITEL X.

BESTIMMUNG DER FUNKTIONEN DURCH IHRE NULLPUNKTE UND SINGULÄREN PUNKTE.

GANZE TRANSCENDENTE FUNKTIONEN.

94. Wir wollen nunmehr auf eine nähere Untersuchung ganzer transcendenter Funktionen eingehen; von diesen wissen wir, dass sie einen wesentlich singulären Punkt im Punkte ∞ haben, und dass sie sich von einem beliebigen Punkte der Ebene aus in Potenzreihen entwickeln lassen, die unbedingt konvergent sind für alle endlichen Werte von z. Ist $u = f(z)$ die Funktion, so wird z als Funktion von u unendlichdeutig. Das folgt aus *Picards* Satz, nach dem die Gleichung $f(z) = u$ für höchstens einen endlichen Wert von u eine endliche Anzahl von Lösungen haben kann. Zur Funktion z gehört also eine *Riemann*sche Fläche mit unendlich vielen Blättern, und diese werden auf der z-Ebene so abgebildet, dass diese gerade einmal überdeckt wird.

Die notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe $\Sigma a_n z^n$ eine ganze Funktion darstellt, ist die (*Hadamard*), dass

$$\left|\sqrt[n]{a_n}\right|$$

gleichmässig nach Null zu konvergiert. Wir verstehen hierunter, dass man, wenn ε eine beliebig kleine gegebene positive Grösse darstellt, ein solches n finden kann, dass für dieses und grössere n

$$\left|\sqrt[n]{a_n}\right| < \varepsilon.$$

Dass diese Bedingung notwendig ist folgt daraus, dass $|a_n z^n|$ für ein beliebiges z nach Null zu konvergieren soll; sie ist ausreichend, weil

$$|a_n z^n| + |a_{n+1} z^{n+1}| + \ldots < |\varepsilon z|^n + |\varepsilon z|^{n+1} + \ldots$$

Digitized by Google

woraus folgt, das die gegebene Reihe für einen beliebigen Wert von z unbedingt konvergiert.

Ganze transcendente Funktionen geben bei Addition oder Multiplikation wieder ganze, im allgemeinen transcendente Funktionen. Bei Division wird der Quotient eine Funktion, die dort Pole hat, wo der Divisor Nullpunkte hat, wenn ein solcher Nullpunkt nicht zugleich Nullpunkt von derselben oder höherer Ordnung für den Dividenden ist. Ist dieses jedoch mit allen Nullpunkten des Divisors der Fall, so wird der Quotient eine ganze transcendente Funktion, und wir wollen sagen, dass *die Division aufgeht.*

95. Eine ganze rationale Funktion ist bis auf einen konstanten Faktor durch ihre Nullpunkte bestimmt; wir wollen untersuchen, ob ein analoger Satz für ganze transcendente Funktionen gilt. Von den Nullpunkten wissen wir, dass sie von endlicher Ordnung sind, und dass sie sich nur im Punkte ∞ so zuzammenhäufen können, dass unendlich viele in ein endliches Flächenstück fallen. Indem wir sie mit a_1, $a_2 \ldots$ bezeichnen, nehmen wir zugleich an, dass sie nach der Grösse ihrer Moduln geordnet seien, so dass $|a_n|$ bis ins Unendliche mit n wächst. Der Einfachkeit wegen wollen wir annehmen, dass sie alle von der Ordnung 1 sind, da die übrigen Fälle sich als Grenzfälle betrachten lassen.

Nun haben wir, wenn die gegebene Funktion $f(z)$ ist, und $f_1(z)$ eine Funktion bezeichnet, die auch ganz transcendent ist und nicht Null wird für $z = a_1$, sondern für a_2, $a_3 \ldots$,

$$f(z) = (z - a_1) f_1(z),$$

woraus

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{f'_1(z)}{f_1(z)}$$

und, wenn wir auf dieselbe Weise fortfahren,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + \ldots + \frac{1}{z - a_n} + \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}, \tag{1}$$

wo $f_n(z)$ eine ganze transcendente Funktion bedeutet, die dieselben Nullpunkte hat wie $f(z)$ mit Ausnahme von $a_1, a_2 \ldots a_n$.

Digitized by Google

Nun fragt es sich, ob wir in der gefundenen Formel n bis ins Unendliche wachsen lassen können. Es ist klar, dass dies sich nicht thun lässt, wenn die unendliche Reihe von Brüchen divergent wird; wir wollen deshalb vorläufig voraussetzen, dass sie für alle endlichen, von den Grössen a verschiedenen Werte von z unbedingt konvergent wird. Die Bedingung hierfür ist die, dass $\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|$ konvergent ist; man hat nämlich

$$\left|\frac{1}{z-a_n}\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right|\left|\frac{1}{1-\frac{z}{a_n}}\right|,$$

wo der letzte Faktor sich 1 nähert, da $|z|$ für hinreichend grosse n gegen $|a_n|$ verschwindend ist.

Man darf jedoch nun nicht schliessen, dass die Konvergenz der Reihe es mit sich bringen muss, dass das Restglied gegen Null konvergiert, sondern nur, dass es gegen eine in der ganzen Ebene endliche Funktion konvergiert. Es geht hier wie bei der Zerlegung rationaler Brüche, wo der ganze Teil des Bruches keinen Einfluss hat auf die Zähler der bei der Zerlegung entstandenen Brüche.

Indessen können wir die obenstehende Formel auf eine solche Weise bilden, dass wir Mittel zur Untersuchung des Restgliedes erhalten. Wir können nämlich *Cauchys* Integral anwenden, wie es bei der Entwickelung von *Laurents* Reihe gezeigt wurde. Wenn wir die n Pole $a_1, a_2 \ldots a_n$ ausschliessen, so erhalten wir n Reihen, die hier jedoch jede nur aus einem Gliede bestehen; wir erhalten also die n Brüche und erkennen, dass das Restglied bestimmt wird durch das *Cauchy*sche Integral, genommen längs einem Kreise, der die n Pole umschliesst. Nähert dieses Integral sich Null bei wachsendem n, so fällt das Restglied fort.

Beispielsweise wollen wir $f(z) = \sin \pi z$ betrachten, deren Nullpunkte alle ganzen Zahlen sind; wir erhalten dann

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \ldots$$
$$= \frac{1}{z} + 2z\left(\frac{1}{z^2-1^2} + \frac{1}{z^2-2^2} + \ldots\right),$$


Digitized by Google

wo die Reihe konvergent ist, und wir also das Restglied

$$\frac{1}{2i}\int\frac{\cot \pi x}{x-z}\,dx$$

zu untersuchen haben.

Wir brauchen nur kleine Werte von z zu betrachten, weil die Funktion dadurch hinreichend bestimmt ist, und da $|x|$ bis ins Unendliche wachsen soll und der Zähler endlich bleibt, so kann das Glied z fortgelassen werden. Setzen wir $x = a(\cos\theta + i\sin\theta)$, so erhalten wir

$$dx:x = i\,d\theta;\quad \cot\pi x = i\frac{e^{2\pi i x}+1}{e^{2\pi i x}-1} = i\frac{e^{-2\pi a\sin\theta}m+1}{e^{-2\pi a\sin\theta}m-1},$$

wo m eine Grösse darstellt, die mit θ variiert, aber den Modulus 1 hat. Hieraus ersehen wir, dass cot πx auf einem unendlich grossen Kreise den Wert $-i$ auf dem oberen, und $+i$ auf dem unteren Halbkreise hat. Die Integrale längs diesen beiden Halbkreisen heben sich deshalb auf. Für $\sin\theta = 0$ ist der Wert unbestimmt, aber endlich, da wir voraussetzen dürfen, dass der Kreis durch keinen Pol geht. Diese Werte sind deshalb ohne Bedeutung für das Integral, welches sich also Null nähert, wenn a bis ins Unendliche wächst.

Als wir oben das logarithmische Differential einer ganzen transcendenten Funktion betrachteten, ergaben sich alle Residuen gleich 1. Unsere Bemerkungen gelten jedoch auch für andere eindeutige Funktionen mit unendlich vielen Polen, nur dass man dann irgend welche beliebige Residuen erhalten kann.

So hat

$$\operatorname{cosec} z = \frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}$$

Pole in den Punkten $p\pi$, wo p alle ganzen Zahlen bedeutet. Für $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ wächst e^{iz} bis ins Unendliche mit r, wenn $\sin\theta$ negativ, nimmt aber ab gegen Null, wenn $\sin\theta$ positiv. Mit e^{-iz} verhällt es sich umgekehrt. Cosec z nimmt also ab gegen Null für alle Werte von θ, ausgenommen wenn $\sin\theta = 0$. Da also das Integral auf dem unendlich grossen

Digitized by Google

Kreise Null ist, so hat man gültig für die ganze Ebene, wenn man je zwei Brüche zusammenzieht,

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{\pi^2 - z^2} - \frac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(3\pi)^2 - z^2} - \cdots$$

Es könnte den Anschein haben, als ob wir hier zu einem Resultat gelangt wären, das in Widerspruch steht zu dem früher erwähnten Satz, dass eine Funktion in der Nähe eines wesentlich singulären Punktes alle Werte annimmt, denn wenn z sich auf der Axe der reellen Zahlen bis ins Unendliche entfernt, erhält cosec z nur reelle Werte. Indessen haben wir zu beachten, dass wir für $z = x + iy$ nicht nur $\sin\theta = 0$ erhalten für $y = 0$, sondern auch für ein endliches y, wenn x unendlich ist; lassen wir z sich auf alle dadurch bestimmten Arten bis ins Unendliche entfernen, so erhalten wir in der That alle Werte.

96. Wir kehren nun zurück zu unserer Entwickelung von $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Konvergiert das Restglied gegen Null, so erhalten wir, wenn wir mit dz multiplicieren, integrieren und zu Zahlen übergehen,

$$(2) \qquad f(z) = C\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)\left(1 - \frac{z}{a_3}\right)\cdots,$$

wo C eine Konstante bedeutet, und das Produkt bis ins Unendliche fortgesetzt wird. Es ist im allgemeinen bedingt konvergent, da wir vorausgezetzt haben, dass die Nullpunkte nach der Grösse ihrer Moduln geordnet sind.

Wenn das Restglied in (1) sich einer Funktion $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ nähert, so muss $\varphi(z)$ ohne Nullpunkte sein, die Funktion also holomorph in der ganzen Ebene; sie lässt sich dann darstellen durch eine in der ganzen Ebene gültige Potenzreihe, wenn die Koefficienten dieser sich bestimmten endlichen Grössen nähern. Die Reihe von Brüchen muss in diesem Falle konvergent sein, und man erhält

$$(3) \qquad f(z) = e^{\psi(z)}\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)\cdots,$$

wo $\psi(z)$ eine ganze transcendente Funktion bedeutet.

Digitized by Google

Anders verhält es sich, wenn die Koefficienten bis ins Unendliche wachsen; in diesem Falle muss die Reihe von Brüchen divergent sein; und umgekehrt, wenn die Bruchreihe divergent ist, muss ψ mit n bis ins Unendliche wachsen. In diesem Falle muss man die Teilung in Reihe und Restglied auf eine andere Weise machen.

Wir wollen beispielsweise $\Gamma(z)$ betrachten; aus der Definition von *Gauss* folgt für $n = \infty$

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+n} - ln.$$

Hier ist die Reihe divergent, und das Restglied $-ln$, das von der Integration auf dem Kreise mit dem Radius n herrühren muss, wächst mit n bis ins Unendliche; nun ist indessen für unendlich grosse n, wenn C die *Euler*sche Konstante bedeutet,

$$ln = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - C;$$

man kann also setzen

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = C + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z+1} - 1\right) + \left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{2}\right) + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) + \dots;$$

dadurch ist eine konvergente Reihe und ein endliches Restglied gebildet; man erhält daraus

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{Cz} \Pi \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}. \tag{4}$$

Faktoren von der hier vorkommenden Form oder allgemeiner von der Form

$$\left(1 - \frac{z}{a}\right) e^{\psi(z)},$$

wo ψ eine ganze, rationale oder transcendente Funktion von z bedeutet, die a als Parameter enthält, werden von *Weierstrass*

Digitized by Google

primäre Faktoren genannt; ein jeder solcher bestimmt, wenn er gleich Null gesetzt wird, nur den einen Nullpunkt a, da der exponentielle Faktor nicht Null werden kann.

Weiss man, dass eine ganze transcendente Funktion die Nullpunkte $a_1, a_2 \ldots$ hat, ist die Funktion aber im übrigen nicht bekannt, so kann man ihre allgemeine Form suchen.

Ist $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ konvergent, so ist in (1) die Reihe der Brüche unbedingt konvergent. Das Restglied muss sich dann für wachsende n dem logarithmischen Differential einer ganzen transcendenten Funktion ohne Nullpunkte nähern.

Da deren Logarithmus nicht in der ganzen Ebene unendlich werden kann und deshalb eine ganze transcendente Funktion sein muss, so erhalten wir, wenn wir diese mit $G(z)$ bezeichnen, durch Integration

$$f(z) = e^{G(z)} \Pi \left(1 - \frac{z}{a_n}\right); \tag{5}$$

dieser Ausdruck giebt also die für die ganze Ebene geltende allgemeine Form der gesuchten Funktion an.

97. Ist die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ nicht konvergent, so kann man im allgemeinen eine konvergente Reihe

$$\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1}$$

bilden, wo p eine gewisse, positive ganze Zahl bedeutet, von der wir annehmen, dass sie die kleinste ist, für welche die neue Reihe konvergent ist. Die Reihe

$$\sum \frac{z^p}{a_n^p (z - a_n)}$$

ist dann unbedingt konvergent, denn es ist

$$\sum \left|\frac{z^p}{a_n^p (z - a_n)}\right| = \sum \left|\frac{1}{a_n^{p+1}}\right| \left|\frac{a_n z^p}{z - a_n}\right|,$$

Digitized by Google

wo der letzte Faktor, da z endlich ist, für wachsende n sich $|z^p|$ nähert.

Nun ist identisch

$$\frac{z^p}{a_n^p(z-a_n)} = \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p};$$

wir erhalten also eine unbedingt konvergente Reihe, wenn wir zu jedem der Brüche $\frac{1}{z-a_n}$ das Polynom

$$\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}$$

hinzufügen, und dies muss es dann mit sich bringen, dass das Restglied sich einer endlichen Funktion nähert. Setzen wir

$$\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \frac{z^3}{3a_n^3} + \ldots + \frac{z^p}{pa_n^p} = g_n(z),$$

so erhalten wir durch Integration

$$f(z) = e^{G(z)} \Pi\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{g_n(z)}. \tag{6}$$

Ist $g_n(z)$ vom Grade p und $G(z)$ nicht von höherem Grade, so sagt *Laguerre,* die Funktion sei vom *Genre* p. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass das Produkt unbedingt konvergent ist. So ist $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ als Funktion von z^2 vom Genre 0, aber als solche von z vom Genre 1. (Man vergleiche oben den Ausdruck für $\frac{1}{z\Gamma(z)}$.)

Es ist aber möglich, dass die oben betrachtete Reihe für kein endliches p konvergent wird; so ist z. B. die Reihe

$$\sum \frac{1}{(ln)^p}$$

für alle p divergent; man hat nämlich

Digitized by Google

$$s_n > \frac{n-1}{(ln)^p},$$

und diese Grösse wächst mit n ohne Grenze.

In diesem Falle kann man für p eine mit n wachsende Zahl setzen, z. B. mit *Weierstrass* $p = n$; die Reihe

$$\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^{n+1}$$

ist nämlich, wie man leicht durch *Cauchys* Satz sieht, immer konvergent. Die Entwickelung ist übrigens dieselbe wie oben, und man erhält wie dort die Formel (6), nur dass das Polynom $g_n(z)$ vom Grade $n-1$ wird.

Die Zahl p ist jedoch hier viel grösser als notwendig genommen; bei der folgenden Methode, die für alle Fälle gilt, werden die Grade der Polynome so klein wie möglich.

Wir ordnen die Nullpunkte nach der Grösse der Moduln und setzen

$$\frac{ln}{l|a_n|} = \varrho_n,$$

wodurch

$$\frac{1}{|a_n|^{\varrho_n}} = \frac{1}{n};$$

daraus folgt, dass die Reihe

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\varrho_n(1+\alpha)}}$$

konvergent ist, wie klein auch die positive Grösse α genommen wird. Hiermit sind dann die Grade der Polynome so klein wie möglich bestimmt. Wenn ϱ_n mit n ins Unendliche wächst, ist das Genre unendlich; für diesen Fall verweisen wir auf eine Abhandlung von *E. Borel*[1]); hier wollen wir nur den Fall, wo die ϱ endlich sind, näher betrachten.

Wir setzen dann voraus, dass die ϱ_n eine endliche Grenze

---

[1]) Acta mathematica. Bd. 20. Pg. 357.

Digitized by Google

ϱ haben oder, genauer ausgedrückt, wir nehmen an, dass wir für ein beliebig klein gewähltes α, n so gross nehmen können, dass für dieses und grössere n

$$\varrho - \alpha < \varrho_n < \varrho + \alpha.$$

Ist ϱ ein Bruch und p die grösste darin enthaltene ganze Zahl, so ist p das Genre des Produktes der primären Faktoren; ist ϱ eine ganze Zahl, so ist das Genre ϱ oder $\varrho - 1$.

Setzt man $|a_n| = r$, so erhält man

$$n = r^\varrho;$$

man kann also r so gross nehmen, dass für dieses und grössere r die Anzahl der Nullpunkte in einem Kreise mit 0 als Mittelpunkt und dem Radius r zwischen $r^{\varrho - \alpha}$ und $r^{\varrho + \alpha}$ liegt, wie klein auch die positive Grösse α genommen sein mag.

Man ersieht hieraus, dass ϱ eine Zahl ist, die die ganzen Funktionen von endlichem Genre nach der Dichtigkeit ihrer Nullpunkte im Unendlichen charakterisiert. Zu einem gegebenen ϱ gehört eine ganze Klasse von Funktionen, denn die Bestimmung von ϱ zeigt, dass diese Zahl dieselbe ist für zwei Funktionen, wenn nur das Verhältnis der Anzahlen ihrer Nullpunkte in jedem Kreise endlich ist, ja selbst wenn es unendlich von hinlänglich niedriger Ordnung (z. B. wie lr) ist. So gehört z. B. dieselbe Zahl ϱ zu einer Funktion und zu ihren Potenzen, und für ein Produkt ist ϱ die grösste Zahl, die zu einem der Faktoren gehört.

Nun zeigen die Untersuchungen von *Poincaré, Hadamard*[1] und *Borel,* dass ϱ in enger Verbindung mit dem Wachsen der Funktion steht; was wir hierunter verstehen, wollen wir folgendermassen näher präcisieren:

Ist $|z| = r$, so sagen wir, dass eine Funktion wie e^{r^μ} wächst, wenn, für ein beliebig klein gewähltes α, r so gross genommen werden kann, dass der grösste Wert des Modulus der Funktion für dieses und grössere r zwischen $e^{r^{\mu - \alpha}}$ und $e^{r^{\mu + \alpha}}$

[1]) Journal de mathématiques pures et appliquées 1893.


Digitized by Google

fällt. Man sieht, dass auch bei dieser Bestimmung dasselbe μ einer Funktion und ihren Potenzen entsprechen wird. Für eine Summe ist μ gleich dem grössten μ, das zu einem der Summanden gehört, wenn diese μ verschieden sind; der analoge Satz gilt auch für ein Produkt. Dieses folgt aus dem von *Hadamard* bewiesenen Satz, dass es immer ins Uendliche wachsende Kreise giebt, für die der kleinste Wert des Modulus grösser ist als $e^{-r^{\mu}}$. Haben zwei Faktoren $\varphi(z)$ und $\varphi_1(z)$ dasselbe μ, so kann ihr Produkt ein kleineres μ haben, aber $\varphi(z)(\varphi_1(z)+P)$ wird dasselbe μ haben, wenn P eine Konstante oder eine Funktion mit einem kleineren μ bedeutet, denn das μ wird hier von dem Gliede $P\varphi(z)$ bestimmt. So hat man z. B. $e^z \cdot e^{-z} = 1$, wo für beide Faktoren $\mu = 1$, während das Produkt konstant ist. Dagegen ist $\mu = 1$ für $e^z(e^{-z}-1)$.

Die oben genannte Verbindung wird nun durch den Satz ausgedrückt, dass man $\mu = \varrho$ hat, wenn in dem Ausdruck (6) für die Funktion $G(z)$ nicht von höherem Grade ist als dass Polynom $g_n(z)$. Dass diese Bedingung notwendig ist, ist klar, denn durch Multiplikation mit einem Faktor $e^{G(z)}$ kann man μ beliebig vergrössern, ohne dass ϱ verändert wird. Dagegen wird man wieder $\mu = \varrho$ haben, wenn zu $e^{G(z)}$ eine beliebige Funktion mit kleinerem μ addiert wird.

Für die Beweise dieser Sätze verweisen wir auf die genannten Abhandlungen; hier wollen wir aber eine neue Entwickelung geben, welche es warscheinlich macht, dass man mit Vorteil statt des grössten Wertes des Modulus gewisse Mittelwerte betrachten kann; man erreicht dadurch nämlich, dass die Sätze allgemeinere Geltung erlangen.

Bedeutet $\varphi(z)$ eine eindeutige Funktion, die in der Ebene keine wesentlich singulären Punkte hat, so setzen wir

$$l\varphi(z) = lR + \Theta i,$$

wo dann

$$\frac{\partial lR}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial y}; \quad \frac{\partial lR}{\partial y} = -\frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

oder

Digitized by Google

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}\right)=\frac{\partial \Theta}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\frac{x}{r^2};$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}\right)=-\frac{\partial \Theta}{\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\frac{y}{r^2},$$

woraus

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r}=-\frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial \theta};\quad \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}=\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}.$$

Hieraus folgt

$$d\Theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial l R}{\partial \theta}dr+r\frac{\partial l R}{\partial r}d\theta.$$

Wenn wir hier längs einer geschlossenen Kurve integrieren, so erhalten wir bekanntlich $2\pi n$, wo n die Anzahl der Nullpunkte, vermindert um die Anzahl der Pole in dem von der Kurve begrenzten Flächenstück, bedeutet. Wählen wir als Integrationskurve einen Kreise mit dem Mittelpunkt im Punkte 0, dann ist $dr=0$, und wir erhalten

$$n=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial l R}{\partial r}r\,d\theta.$$

Wir wollen jetzt voraussetzen, dass $\varphi(z)$ eine ganze transcendente Funktion bedeutet; n stellt dann die Anzahl der Nullpunkte im Kreise dar. n wird sich dann mit wachsendem r sprungweise ändern und erfährt die Zunahme 1 jedes Mal, wenn der wachsende Kreis einen Nullpunkt in sich aufnimmt.

Wir multiplicieren jetzt mit $\frac{dr}{r}$ und integrieren von 0 bis r. Ist R_0 der Wert von R im Punkte 0, und sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Moduln der Nullpunkte im Kreise, erhalten wir

$$l\frac{r^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}=\frac{1}{2\pi}\int l\frac{R}{R_0}d\theta,$$

eine Formel, die für alle Fälle gültig ist. Faktoren ohne Nullpunkte spielen hier keine besondere Rolle, da sie für das Integral ohne Bedeutung sind.

Für hinlänglich grosse r können wir, mit der früher gegebenen Auffassung von ϱ,

$$a_1 a_2 \ldots a_n=(1.2.3.n)^{\frac{1}{\varrho}}=\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{\varrho}};\ n=r^{\varrho}$$

setzen. Ist $\overline{R}$ der grösste Wert des Modulus auf dem Kreise, dessen Radius r ist, so erhält man

$$\overline{R} > e^{\frac{1}{\varrho} r^\varrho}$$

oder

$$\mu \geqq \varrho.$$

Während man also nie $\mu < \varrho$ haben kann, giebt es Fälle, wo $\mu > \varrho$, nämlich wenn der Grad des Polynoms $G(z)$ grösser ist als der Grad von $g(z)$ und somit das Genre der Funktion bestimmt; das Genre ist dann gleich μ, denn bei der Bestimmung dieser Zahl ist in $G(z)$ nur das Glied mit dem grössten Exponenten von Bedeutung. Da μ in diesen Fällen immer eine ganze Zahl ist, muss man, wenn μ ein Bruch ist, immer $\mu = \varrho$ haben.

Wir wollen uns damit begnügen den Satz für den Fall zu beweisen, wo das Genre $p = 0$, also $\varrho \leqq 1$ ist. Man hat dann

$$\overline{R} < R_0 \left(1 + \frac{r}{a_1}\right)\left(1 + \frac{r}{a_2}\right) \cdots$$

Liegen n Nullpunkte im Kreise mit dem Radius r, dann ist für $q > n$

$$1 + \frac{r}{a_q} \leqq 1 + \frac{r^{\varrho+\varepsilon}}{a_q^{\varrho+\varepsilon}},$$

wo ε eine kleine positive Grösse ist und $\varepsilon = 0$ für $\varrho = 1$. Hieraus folgt nach einem bekannten Mittelwertsatz

$$\left(1 + \frac{r}{a_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{r}{a_{n+2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{r}{a_{n+m}}\right) < \left(1 + \frac{r^{\varrho+\varepsilon}}{m} \sum_{n+1}^{n+m} \frac{1}{a_q^{\varrho+\varepsilon}}\right)^m.$$

Lassen wir m ins Unendliche wachsen, so bekommt Σ einen endlichen, mit wachsenden r abnehmenden Wert, den wir mit k bezeichnen wollen; man hat dann

$$\lim \left(1 + \frac{k r^{\varrho+\varepsilon}}{m}\right)^m = e^{k r^{\varrho+\varepsilon}}.$$

Digitized by Google

Ferner ist für hinlänglich grosse r

$$\left(1+\frac{r}{a_1}\right)\left(1+\frac{r}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{r}{a_n}\right) < \frac{(2r)^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}.$$

Man ersieht hieraus, dass man nicht $\mu > \varrho$ haben kann, und dann muss $\mu = \varrho$ sein.

EINDEUTIGE FUNKTIONEN MIT SINGULÄREN PUNKTEN IN DER EBENE.

98. Nun wollen wir uns denken, dass unsere eindeutige Funktion nicht ganz transcendent ist, sondern dass sie eine endliche oder unendliche Anzahl von Polen hat; im ersten Fall wissen wir, dass wir nur mit einem gewissen ganzen Polynom zu multiplicieren brauchen, um eine ganze transcendente Funktion zu erhalten. Wir wollen uns deshalb an den Fall halten, wo unendlich viele Pole vorhanden sind.

Die Entwickelung ist in diesem Falle nicht wesentlich verschieden von derjenigen, die wir bei Betrachtung der Nullpunkte benutzten. Der Unterschied besteht nur darin, dass einem einfachen Pol in $f(z)$ das Residuum -1 in der logarithmisch Abgeleiteten der Funktion entspricht. Bezeichnet man die Pole mit $b_1, b_2 \ldots$, die Nullpunkte wie früher mit $a_1, a_2 \ldots$, so erhält man also

$$f(z) = e^{G(z)} \frac{\Pi\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}}{\Pi\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{k_n(z)}}, \tag{7}$$

wo k_n analog g_n ist.

99. *Weierstrass* und *Mittag-Leffler* haben für eindeutige Funktionen, die in der Ebene eine endliche oder unendliche Anzahl wesentlich singulärer Punkte haben, algemeine Ausdrücke gefunden. Sind die singulären Punkte $c_1, c_2, c_3 \ldots$, so haben wir mit Hülfe von *Cauchys* Integral gefunden

$$f(z) = G(z) + G_1\left(\frac{1}{z-c_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-c_2}\right) + \cdots,$$

Digitized by Google

wo G, G_1, $G_2 \ldots$ Potenzreihen bedeuten, die in der ganzen Ebene gültig sind, und die, mit Ausnahme von G, kein konstantes Glied enthalten. Im besonderen kann man sich denken, dass einige von den Punkten c Pole seien; die entsprechenden Reihen haben dann eine endliche Anzahl Glieder. Ist die Anzahl der singulären Punkte endlich, oder ist sie unendlich, aber so, dass die Reihe $G_1 + G_2 + \ldots$ konvergent ist, so muss $G(z)$ für einen bis ins Unendliche wachsenden Integrationskreis gegen eine endliche und bestimmte Grenzfunktion konvergieren. Das ist jedoch nicht der Fall, wenn die Reihe $G_1 + G_2 + \ldots$ divergent ist. Es kommt dann, ebenso wie oben, darauf an, zu den Gliedern G_1, $G_2 \ldots$ solche Teile von G hinzuzufügen, dass beide Reihen für alle endlichen z konvergent werden. Wir nehmen an, dass die Punkte c in der Ebene durch endliche Abstände von einander getrennt liegen, und dass sie nach der Grösse ihrer Moduln geordnet sind.

Nun wollen wir die Reihe $G_n\left(\frac{1}{z-c_n}\right)$ betrachten. Diese ist in ihrer gegebenen Form für die ganze Ebene gültig; verändern wir sie aber in eine Potenzreihe, die nach Potenzen von z fortschreitet, so ist diese nur gültig für $|z| < |c_n|$. Da die Reihe innerhalb des Konvergenzkreises gleichmässig konvergent ist, so können wir, wenn ε_n eine beliebig gewählte, kleine positive Grösse bezeichnet, so viele Glieder der Reihe mitnehmen, dass der Rest für jedes in der Fläche des Konvergenzkreises liegende z einen Modulus hat, der kleiner ist als ε_n. Der abgeschnittene endliche Teil der Reihe ist ein Polynom, das wir mit P_n bezeichnen wollen. Ist der Nullpunkt ein singulärer Punkt, so können wir, was ihn betrifft, von einem anderen Punkte aus entwickeln.

Wir bilden nun die Reihe

$$\sum \left| G_n\left(\frac{1}{z-c_n}\right) - P_n \right|,$$

und wollen beweisen, dass sie konvergent ist für jeden endlichen Wert von z, wenn die Grössen ε so gewählt sind, dass sie eine konvergente Reihe bilden.

Digitized by Google

Da die Moduln der Grössen c_n mit n bis ins Unendliche wachsen, so müssen wir für jedes endliche z eine solche Zahl n finden können, dass, für diese und alle grösseren $n, |c_n| > |z|$. Von demjenigen Teil der Reihe, der kleineren Werten von n entspricht, können wir bei der Untersuchung über die Konvergenz absehen, da er aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht und die in den einzelnen Gliedern vorkommenden Reihen G konvergent in der ganzen Ebene sind, den singulären Punkt ausgenommen, zu dem sie gehören. Der übrigbleibende unendliche Teil der Reihe ist jedoch konvergent, da seine Glieder Moduln haben, welche kleiner sind als die entsprechenden positiven Grössen ε, die nach unserer Voraussetzung eine konvergente Reihe bilden.

Wir wissen nun, dass $f(z) - G_n\left(\frac{1}{z-c_n}\right)$ keinen singulären Punkt im Punkte c_n hat; dasselbe gilt dann für $f(z) - G_n\left(\frac{1}{z-c_n}\right) + P_n$, da P_n ein endliches Polynom ist. Daraus erkennen wir, dass

$$f(z) - \sum\left(G_n\left(\frac{1}{z-c_n}\right) - P_n\right)$$

keine anderen singulären Punkte hat als den Punkt ∞, also eine ganze transcendente Funktion sein muss. Wird diese durch $G(z)$ bezeichnet, so haben wir also

$$f(z) = G(z) + \sum\left(G_n\left(\frac{1}{z-c_n}\right) - P_n\right). \tag{8}$$

Diese Formel begreift als besonderen Fall denjenige in sich, wo alle singulären Punkte Pole sind.

Digitized by Google

KAPITEL XI.

DIE RIEMANNSCHEN EXISTENZTHEOREME.

BESTIMMUNG DER FUNKTIONEN DURCH GRENZBEDINGUNGEN.

100. Bezeichnet $f(z) = u + iv$ eine Funktion, die eindeutig und stetig in einem gewissen Teil der Ebene ist, so gilt dasselbe für die reellen Funktionen u und v; es gilt zugleich für $f'(z)$ (73) und deshalb auch für die partiellen Abgeleiteten von u und v, die den Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \; \Delta v = 0$$

genügen.

Zu der Differentialgleichung $\Delta = 0$ wird man in der mathematischen Physik geführt bei der Bestimmung stationärer Zustände für Wärme, Elektricität u. s. w., und solche reelle Funktionen, die (1) genügen, heissen dort *Potentiale.* Die Kurvensysteme $u = c$ und $v = c$ heissen beziehungsweise *Niveaukurven* und *Sromkurven.* Aus den Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ folgt, dass die beiden Systeme sich unter rechten Winkeln schneiden[1]). Die Potentiale lassen sich genauer dadurch bestimmen, dass ihre Werte auf der Begrenzung des Flächenstücks gegeben sind. Hier drängt sich dann die Frage auf, ob diese Randwerte beliebig gewählt werden können, und wir wollen uns deshalb folgende Aufgabe stellen:

Für die Punkte der Begrenzung eines einfach zusammenhängenden, ebenen Flächenstückes ist eine stetige Reihe von willkürlich gewählten, reellen und endlichen Werten gegeben. Man soll ein für alle Punkte des Flächenstückes eindeutiges und stetiges Potential bestimmen, welches, wenn man sich einem Grenzpunkt nähert, sich dem diesem Punkte entsprechenden Werte nähert.

---

[1]) Felix Klein, Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig. 1882. 8°.

Digitized by Google

Lässt die Aufgabe sich überhaupt lösen, so hat sie nur eine Lösung, denn wenn sie zwei Lösungen hätte, so würde deren Differenz ein eindeutiges und stetiges Potential sein, das auf der ganzen Begrenzung den Wert Null hätte; in 91 haben wir aber bewiesen, dass dieser Umstand mit sich bringt, dass der Wert im ganzen Flächenstück Null ist.

101. Wir wollen zuerst zeigen, dass die Aufgabe sich vollständig lösen lässt, wenn das Flächenstück vom Kreise $x^2+y^2=r^2$ begrenzt ist.

Es sei $z=x+iy$ ein beliebiger Punkt des Flächenstückes, während $\xi=x_0+iy_0$ einen Punkt der Peripherie darstellt. ds ist ein Bogenelement der Kreisperipherie, und k ist der entsprechende gegebene reelle Wert. Bezeichnet $R.w$ den reellen Teil von w, so hat man

$$R.\frac{z_0+z}{z_0-z}=\frac{r^2-x^2-y^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

wo R, wenn x und y die Variablen sind, ein Potential darstellt, das eindeutig und stetig ist, so lange (x, y) innerhalb der Kreisperipherie liegt. Dasselbe gilt dann von der Funktion

$$P=\frac{1}{2\pi r}\int Rk\,ds, \tag{2}$$

wo k und ds dem Punkte (x_0, y_0) entsprechen, und dieser bei der Integration die ganze Kreisperipherie durchlaufen soll.

Um zu beweisen, dass P die gesuchte Funktion ist, ist es nur noch nötig, den Wert zu suchen, dem P sich nähert, wenn (x, y) sich einem Punkte (x_1, y_1) der Peripherie nähert.

Um das zu erreichen, bemerken wir zunächst, dass der Zähler in R der numerische Wert der Potenz des Punktes (x, y) mit Bezug auf den Kreis ist; hieraus folgt, dass R das Verhältnis zwischen den beiden Abschnitten einer Sehne durch (x_0, y_0) und (x, y) ist. Ziehen wir durch (x, y) zwei Sehnen, die zwischen sich das Bogenelement ds abschneiden, so hat man also

$$R\,ds=ds',$$

Digitized by Google

wo ds' das zweite zwischen den beiden Sehnen abgeschnittene Bogenelement bedeutet. Vertauschen wir überall die beiden ds und ds' entsprechenden Werte, und liegt der Punkt (x, y) unendlich nahe bei (x_1, y_1) mit dem Werte k_1, so werden die Werte unendlich wenig von k_1 auf der ganzen Peripherie abweichen, ausgenommen in dem bei (x_1, y_1) liegenden Bogenelement, auf dem alle, dem übrigen Teil der Kreisperipherie entsprechenden Werte zusammengedrängt werden; da dieses Element ohne Bedeutnng für das Integral ist, so erhalten wir also für den gesuchten Wert

$$P_1 = \frac{k_1}{2\pi r}\int ds = k_1.$$

Machen die Werte im Punkte (x_1, y_1) einen endlichen Sprung von k_1 nach k_2, und ziehen wir von dem Punkte eine Sehne, die in dem Punkte diejenige Kurve berührt, längs welcher der Punkt (x, y) sich nähert, so teilt die Sehne die Peripherie in zwei Bogen b_1 und b_2, deren Punkten beziehungsweise k_1 und k_2 entsprechen; das Potential nähert sich dann dem Werte

$$P_1 = \frac{k_1 b_2 + k_2 b_1}{2\pi r}, \tag{3}$$

ein Wert, *der immer zwischen k_1 und k_2 liegt,* wenn wir uns nicht längs einer Kurve nähern, die den Kreis in (x_1, y_1) berührt.

Als Beispiel wollen wir das Potential

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{4}$$

betrachten, das stetig ist längs dem Rande, ausgenommen im Punkte (x_1, y_1), wo es den Sprung π macht; nähern wir uns dem Punkte von innen, so wird der Grenzwert gleich dem Winkel, den die oben erwähnte Tangente mit der Abscissenaxe bildet, ein Resultat, das, wie leicht ersichtlich, zu (3) stimmt.

Die Funktion (4) lässt sich bei beliebigen Randkurven benutzen, um Sprünge in der gegebenen Wertreihe zu entfernen, wenn die Sprünge nur endlich sind und nur in endlicher Anzahl

Digitized by Google

vorkommen; man braucht nämlich nur von der gesuchten Funktion die den Unstetigkeitspunkten entsprechenden Funktionen (4), multipliciert mit passenden Konstanten, zu subtrahieren, um die Aufgabe auf eine andere zu reducieren, bei der keine Sprünge in den gegebenen Werten vorkommen. Wir setzen jedoch voraus, dass zwei konsekutive Bogenelemente in einem Punkte, wo die Randwerte einen Sprung machen, den Winkel π bilden. Wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn dass nicht der Fall ist, wird später gezeigt werden.

Da man aus einem Potential u, abgesehen von einem konstanten Gliede, ein anderes Potential v so bestimmen kann, dass $u + iv$ eine monogene Funktion ist, so kann man den bewiesenen Satz auch folgendermassen aussprechen:

Man kann eine und nur eine Funktion so bestimmen, dass sie eindeutig und stetig in einem gegebenen Kreise ist, während ihr reeller Teil wilkürlich gegebene, stetige Randwerte hat, und ihr imaginärer Teil in einem gegebenen inneren Punkt einen gegebenen Wert hat.

Dass die Funktion v eindeutig ist, folgt daraus, dass ihre Abgeleiteten eindeutig und stetig im ganzen Kreise sind. (Man vergleiche den Satz S. 43).

Wir können auch die Funktion für den ausserhalb der Kreisperipherie liegenden Teil der Ebene bilden, aber die beiden Funktionen werden in der Regel nicht die analytischen Fortsetzungen von einander sein, da die Monogenität im Algemeinen auf der Peripherie aufhört.

Die Formel (2) zeigt, dass der Wert des Potentials im Mittelpunkt, wo man $R = 1$ hat, das Mittel ist aus den Werten auf dem gegebenen oder einem damit koncentrischen Kreise.

102. Wir kehren nun zurück zu der allgemeinen Aufgabe; wir haben also in der z-Ebene ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, für dessen Begrenzung eine willkürliche Reihe von Werten gegeben ist, die stetig sind oder eine endliche Anzahl endlicher Sprünge machen. Wir nehmen an, dass das Flächenstück sich auf einem Kreise so abbilden lässt, dass die Abbildung für alle inneren Punkte konform ist, während die Randkurven einander Punkt für Punkt entsprechen.

Digitized by Google

Geschieht die Abbildung durch die Funktion $\xi = \varphi(z)$, so müssen $\varphi(z)$ und $\varphi'(z)$ für alle innerhalb des Randes des Flächenstückes liegenden Punkte stetig und eindeutig sein, während zugleich $\varphi'(z)$ in keinem von diesen Punkten Null werden kann. Wenn die gegebenen Randwerte von den Punkten der Kurve auf die entsprechenden Punkte der Kreisperipherie übertragen werden, so können wir eine Funktion

$$w = f(\xi)$$

bestimmen, deren reeller Teil auf der Kreisperipherie die gegebenen Randwerte hat, und die in einem willkürlich gewählten inneren Punkte einen gegebenen imaginären Teil hat. w als Funktion von z genommen lösst dann die Aufgabe für das gegebene Flächenstück, denn wenn z in diesem eine geschlossene Kurve beschreibt, so beschreibt ξ eine geschlossene Kurve in der Fläche des Kreises, und das bringt mit sich, dass w eine eindeutige und stetige Funktion von z ist; der reelle Teil erhält auf dem Rande die gegebenen Werte, und in einem inneren Punkte, der willkürlich gewählt sein kann, den gegebenen imaginären Teil.

Ist die Aufgabe in der ersten Form gestellt, so dass wir das Potential suchen, so haben wir dieses in dem reellen Teil der Funktion.

Wir haben bereits in 77 gesehen, das ein Blatt der Lemniskate sich konform auf einem Kreis abbilden lässt; einige andere Beispiele sollen hier nach *H. A. Schwarz* angeführt werden.

Eine Halbebene wird auf einem Kreise durch jede gebrochene lineare Funktion abgebildet.

Eine Schraubenfläche mit p Blättern und mit dem Verzweigungspunkte in z_0 wird, wenn ihre Randpunkte denselben Abstand von z_0 haben, auf einer Kreisfläche abgebildet durch die Funktion

$$w = (z - z_0)^{\frac{1}{p}}.$$

Ein Kreisbogenzweieck, dessen Winkel bei z_0 und z_1 $\alpha\pi$ sind, wird auf einer Halbebene abgebildet durch die Funktion

Digitized by Google

$$w = \left(\frac{z - z_0}{z - z_1}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

Hierher gehört ein Kreissegment und speciel ein Halbkreis.

Teilen wir das Zweieck in zwei Teile durch einen Kreisbogen, der senkrecht auf den beiden Seiten steht, so bildet die Funktion den einen Teil als einen Halbkreis ab, dessen Durchmesser ein Teil von der Begrenzung der Halbebene ist; der andere Teil wird als der ausserhalb des Kreises liegende Teil der Halbebene abgebildet. Hierher gehört ein Kreissektor.

Ein Kreisbogendreieck hat zwei rechte Winkel und in z_0 eine Spitze, deren Tangente bestimmt wird durch

$$z_0 + t e^{a \pi i},$$

wo t positive Werte durchläuft. Es wird durch

$$\xi = \frac{e^{a \pi i}}{z - z_0}; \quad w = e^{-\xi}$$

abgebildet auf einem Kreissektor.

Eine Parabel hat ihren Brennpunkt in $z = 0$, ihren Scheitelpunkt in $z = 1$.

Durch die Funktionen

$$w = \mathrm{tg}^2(\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{z}) \text{ og } w = \frac{2}{\sqrt{z}} - 1$$

wird beziehungsweise die innere und die äussere Fläche auf einem Kreise abgebildet.

Die Halbaxen a und b einer Ellipse liegen auf den Koordinatenaxen, und es ist $a^2 - b^2 = 1$; die innere und die äussere Fläche werden auf einem Kreise abgebildet beziehungsweise durch die Funktionen

$$w = \sin\mathrm{am}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin z\right); \quad \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = e^{-\frac{K'}{K}\pi} = q$$

$$\text{und } w = \frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{a - b}.$$

Digitized by Google

In dem ersten Falle wird k^2 aus q durch eine später abzuleitende Formel bestimmt.

Im besonderen wollen wir uns einen Fall betrachten, den wir später verwenden werden.

Ein Winkel π lässt sich, wie wir bald sehen werden, auf einem Winkel $\alpha\pi$ abbilden, wobei wir jedoch voraussetzen wollen, dass $2 \overline{\geq} \alpha > 0$.

Haben wir nun eine Randkurve, bei der die gegebenen Randwerte in einem von den Punkten einen Sprung von k_1 nach k_2 machen, während gleichzeitig die konsekutiven Bogenelemente den Winkel $\alpha\pi$ bilden, so können wir diesen Winkel durch konforme Abbildung in π verändern; nähern wir uns nun dem Punkte von innen, so gilt die früher gefundene Formel (3), wenn Winkel statt der Bogen eingeführt werden; da nun jedoch die Winkel um den Punkt durch die konforme Abbildung proportional verändert werden, so erhalten wir

$$P_1 = \frac{k_1 v_2 + k_2 v_1}{\alpha\pi},$$

wo v_1 und v_2 die beiden Winkel sind, in welche der Winkel $\alpha\pi$ geteilt wird durch die Tangente an die Kurve, längs welcher (x, y) sich dem Punkte nähert. Auf den Fall $\alpha = 0$ (nach aussen wendende Spitze; für eine nach innen wendende Spitze ist $\alpha = 2$) wollen wir nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, dass der Wert von P_1 für eine solche nach aussen wendende Spitze abhängig ist von der Ordnung der Berührung der Kurvenzweige unter sich und mit der von (x, y) beschriebenen Kurve.

103. Wir haben gesehen, dass die allgemeine Aufgabe (die sogenannte *Randwertaufgabe*) sich lösen lässt für jedes einfach zusammenhängende Flächenstück, dass sich konform für alle inneren Punkte auf einem Kreis abbilden lässt. *Riemann* hat den Satz aufgestellt, das eine solche Abbildung möglich sei für jedes einfach zusammenhängende Flächenstück und ihn mit Hülfe einer aus der Variationsrechnung entlehnten Methode, dem sogenannten *Dirichletschen* Princip, bewiesen.

Digitized by Google

Weierstrass hat jedoch dargethan, dass der Beweis nicht gilt. Später haben *H. A. Schwarz* und *Neumann* den Satz ungefähr gleichzeitig bewiesen, wenn auch nicht in seinem ganzen Umfange. (Vergleiche *H. A. Schwarz*, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II. und *Neumann*, Vorlesungen über Riemanns Theorie). Hier wollen wir gleich eine Übersicht über die Beweismethode geben, während wir im übrigen auf die genannten Werke verweisen. Zunächst wollen wir jedoch einige sehr allgemeine Aufgaben über Abbildung behandeln, die von *Schwarz* gelöst worden sind.

ABBILDUNG EINER HALBEBENE AUF EIN POLYGON.

104. Wir nehmen an, dass eine Halbene sich auf einem gegebenen Polygon abbilden lässt durch die Funktion $w = f(z)$; wir können von der besonderen Belegenheit des Polygons in der Ebene (die Umlaufsrichtung der Stücke darf jedoch nicht verändert werden) und von dem Massstab, in dem es gezeichnet ist, absehen, wenn wir für w setzen $w_1 = aw + b$, wo a uud b arbiträre komplexe Konstanten sind. Es liegt deshalb nahe, statt w einen daraus gebildeten Ausdruck zu betrachten, der für alle a und b derselbe ist; nun ist

$$\frac{dw_1}{dz} = a\frac{dw}{dz};\quad \frac{d}{dz}\left(l\frac{dw_1}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(l\frac{dw}{dz}\right). \tag{5}$$

Wir haben also einen Ausdruck gefunden, der unverändert bleibt bei ganzen linearen Transformationen von w, und diesen Ausdruck wollen wir versuchen als Funktion von z zu bestimmen.

Da die Lage des Polygons gleichgültig ist, so können wir uns denken, dass seine eine Ecke im Punkte 0 liegt, während die eine Seite längs der Axe der reellen Zahlen fällt; der Winkel sei $\alpha\pi$, wo α positiv ist; dieser soll dann als ein Winkel π abgebildet werden, dessen Schenkel beide auf die Axe der reellen Zahlen fallen; die einfachste Funktion, welche diese Abbildung ausführt, ist

$$v = w^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Digitized by Google

Ist z eine beliebige andere Funktion von w, welche dieselbe Abbildung ausführt, so muss v, als Funktion von z genommen, Winkel am Punkte 0 unverändert lassen; da dieser Punkt also nicht singulär sein kann, so muss v sich von Null aus in einer Potenzreihe entwickeln lassen, die innerhalb eines gewissen Kreises gilt; da $v = 0$ auch $z = 0$ mit sich führen muss, so muss man also haben

$$v = cz(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots);$$

hier müssen alle Koefficienten reell sein, da ein Stück von der Axe der reellen Zahlen auf der Axe der reellen Zahlen abgebildet werden soll; ferner muss c positiv sein, da kleine positive Werte von z kleinen positiven Werten von v entsprechen sollen. Hieraus folgt nun

$$(6) \qquad w = v^{\alpha} = c^{\alpha} z^{\alpha} (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots),$$

wo die Koefficienten b reell sind. Wir haben also die allgemeinste Form einer Funktion bestimmt, die den Winkel π auf dem Winkel $\alpha\pi$ abbildet, wenn die Winkel die angegebene Lage haben.

105. Nun erhält man

$$\frac{dw}{dz} = c^{\alpha} z^{\alpha - 1} (\alpha + b_1 (\alpha + 1) z + \ldots).$$

Nehmen wir hier das logarithmische Differential, so liefert die Grösse in der Klammer einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Potenzreihen mit reellen Koefficienten sind; dieser Bruch lässt sich in einer ähnlichen, für die Umgegend des Punktes 0 geltenden Reihe entwickeln, und wir erhalten also

$$(7) \qquad \frac{d}{dz}\, l\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\alpha - 1}{z} + d_1 + d_2 z + \ldots,$$

wo die Koefficienten reell sind. Der Ausdruck ist also reell für alle reellen Werte von z, für welche die Reihe konvergirt; das bringt nach 87 mit sich, dass die Funktion sich von der einen Halbebene in die andere erweitern lässt durch Spiegelung.

Digitized by Google

Da alle innerhalb der Begrenzung der Halbebene liegenden Punkte konform durch w abgebildet werden sollen, so kann die Abgeleitete von w für keinen solchen Punkt Null oder unendlich werden, und sein Logarithmus und dessen Abgeleitete sind deshalb eindeutig und stetig für das Innere von beiden Halbebenen. Dasselbe gilt für die Axe der reellen Zahlen mit Ausnahme derjenigen Punkte, die den Ecken des Polygons entsprechen. Diese sind, wie (7) zeigt, einfache Pole.

Es bleibt noch übrig den Fall zu untersuchen, wo $z = \infty$. Soll $w = 0$ einem $z = z_0$ entsprechen, so haben wir in (6) nur z mit $z - z_0$ zu vertauschen; ist $z_0 = \infty$, so haben wir z^{-1} anstatt z zu setzen; dadurch erhalten wir, gültig für unendlich ferne Punkte der Ebene,

$$w = c^{\alpha} z^{-\alpha} (1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots),$$

woraus

$$\frac{d}{dz} l \left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{-\alpha - 1}{z} + \frac{f_1}{z^2} + \frac{g_3}{z^3} + \dots; \tag{8}$$

hieraus geht hervor, dass unsere Funktion Null wird für unendlich ferne Punkte; sie hat also auf der ganzen Kugel nur Pole und ist also eine rationale Funktion. Subtrahiert man von der Funktion die den Polen entsprechenden Glieder von der Form $\frac{\alpha - 1}{z - z_0}$, so kann die neue Funktion auf der ganzen Kugel nicht unendlich werden, ist also eine Konstante; diese Konstante muss den Wert Null haben, da die Funktion Null werden soll für $z = \infty$.

Wir haben also, wenn die Pole a, b, $c \dots$ sind, die entsprechenden Polygonwinkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi \dots$,

$$\frac{d}{dz} l \left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\alpha - 1}{z - a} + \frac{\beta - 1}{z - b} + \frac{\gamma - 1}{z - c} + \dots, \tag{9}$$

woraus

$$w = \int (z - a)^{\alpha - 1} (z - b)^{\beta - 1} (z - c)^{\gamma - 1} \dots dz. \tag{10}$$

Wir haben vorausgesetzt, dass die Fläche des Polygons die innere wäre, d. h. diejenige, die den Punkt ∞ nicht enthält; im entgegengesetzten Falle muss dieser Punkt einem

Digitized by Google

Punkte z_0 auf der Halbebene entsprechen, und diese erhält in diesem Punkte einen Pol. In den Reihen (6) und (7) haben wir dann nur $z - z_0$ für z, und -1 für a zu setzen. Soll das Polygon in einer *Riemann*schen Fläche liegen und einen Verzweigungspunkt enthalten, in dem p Blätter zusammenhängen, und soll dieser Punkt dem Punkte z_0 in der Halbebene entsprechen, so behalten die Reihen auch ihre Gültigkeit, wenn wir $z - z_0$ statt z und p statt a setzen.

106. Die angewandte Methode lässt sich erweitern zu der Bestimmung einer Funktion, welche die Halbebene auf einem Polygon abbildet, das von Kreisbogen begrenzt ist. Wir haben hier nur an Stelle der ganzen linearen Transformation von w die allgemeine gebrochene lineare Transformation zu setzen. Wenn wir die drei Konstanten von dieser eliminieren, so bilden wir einen Differentialausdruck, der bei allen linearen Transformationen unverändert bleibt. Dieser Ausdruck ist die sogenannte *Schwarz*sche *Abgeleitete:*

$$\left\{w, z\right\} = \frac{d^2}{dz^2} l\left(\frac{dw}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} l\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)^2. \tag{11}$$

Da wir durch eine Inversion und eine Umlegung zwei zusammenstossende Seiten dahin bringen können, in zwei gerade Linien überzugehen während die Winkel unverändert bleiben (wobei wir jedoch voraussetzen, dass die beiden Kreisbogen sich nicht berühren) so gilt die Formel (7) auch hier; wir haben dann

$$\frac{d}{dz}\, l\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{a-1}{z} + d_1 + d_2 z + \ldots;\quad \frac{d^2}{dz^2} l\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{1-a}{z^2} + d_2 + \ldots;$$

daraus ergiebt sich

$$\left\{w, z\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{1-a^2}{z^2} + \frac{c}{z} + c_0 + c_1 z \ldots, \tag{12}$$

wo die Koefficienten reell sind; soll der Eckpunkt dem Punkte z_0 entsprechen, so müssen wir $z - z_0$ statt z setzen. Für $z = \infty$ erhalten wir mit Hülfe von (8)

14*

Digitized by Google

(13) $$\left\{w,z\right\} = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{z^2} + \frac{e_3}{z^3} + \frac{e_4}{z^4} + \cdots$$

Für $\alpha = o$ (auswärts wendende Spitze), 1 und 2 (einwärts wendende Spitze) lassen die Formeln sich nicht benutzen; die für diesen Fall geltenden Reihen für w enthalten logarithmische Glieder, wobei wir uns hier jedoch nicht weiter aufhalten wollen.

Wir sehen nun, wenn wir wie im vorigen Falle schliessen und von den erwähnten speciellen Fällen absehen, dass $\{w, z\}$ eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion ist, die Pole hat in denjenigen Punkten der Axe der reellen Zahlen, die den Eckpunkten entsprechen, und die Null wird für $z = \infty$. Subtrahieren wir von der Funktion die den Polen entsprechenden Glieder mit negativen Exponenten, so erhalten wir eine Funktion, die auf der ganzen Kugel nicht unendlich werden kann, also eine Konstante ist; diese muss Null sein, da sie diesen Wert hat für $z = \infty$. Die gesuchte Funktion wird also, wenn sie überhaupt existiert, durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung

(14) $$\left\{w, z\right\} = 2I$$

bestimmt, wo I eine rationale Funktion bedeutet, die unendlich wird in den Punkten, die den Eckpunkten entsprechen, und Null für $z = \infty$. Die Differentialgleichung bleibt unverändert bei jeder linearen Transformation von w, so dass ihr allgemeines Integral ausgedrückt wird als eine lineare Funktion eines willkürlichen partikulären Integrals. Haben wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der Invariante[1]) I, z. B. $y'' + Iy = 0$, und suchen wir die Gleichung zu bilden, die das Verhältnis zwischen zwei partikulären Integralen bestimmt, so erhalten wir genau dieselbe Elimination von Konstanten wie diejenige, welche uns zu der *Schwarz*schen Abgeleiteten führte, und eine kleine Rechnnng zeigt, dass wir zu der Gleichung (14) gelangen.

107. Ist das gegebene, von Geraden oder Kreisbogen be-

---

[1]) Für die Gleichung $y'' + 2Py' + Qy = 0$ ist die Invariante gleich $Q - P' - P^2$.

Digitized by Google

grenzte Polygon ein Dreieck, so können wir die Aufgabe als vollständig gelöst betrachten; wir können hier nämlich die drei den Eckpunkten entsprechenden reellen Punkte beliebig wählen, nur muss ihre Reihenfolge in Bezug auf die Halbebene dieselbe sein wie die Reihenfolge der entsprechenden Punkte in Bezug auf das Dreieck; das erhaltene Dreieck mit den gegebenen Winkeln lässt sich dann immer durch eine lineare Transformation hin auf das gegebene Dreieck bringen. Anders verhält es sich, wenn das Polygon mehr als drei Eckpunkte hat; von den diesen Eckpunkten entsprechenden Punkten lassen sich nur drei beliebig wählen, während die übrigen mit Hülfe der Längen der Polygonseiten bestimmt werden müssen, eine Aufgabe, die zu verwickelten transcendenten Gleichungen führt, von denen wir auf unserem jetzigen Standpunkt nicht einmal sagen dürfen, dass ihre Lösung immer möglich sei.

Als Beispiel wollen wir ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$ und $\nu\pi$ betrachten und dessen Eckpunkten die Punkte 0, 1 und ∞ entsprechen lassen. Die beiden ersten von diesen sind Pole für $\{w, z\}$, während der dritte hier ausnahmsweise kein Pol wird, da wir seine Lage so gewählt haben, dass die Funktion in ihm Null wird. Wir bilden nun den Ausdruck

$$\left\{w, z\right\} - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{1-\mu^2}{(z-1)^2}\right) - \frac{a}{z} - \frac{b}{z-1},$$

der den Wert Null haben soll, wenn wir für a und b passende reelle Konstanten setzen. Nun soll $\{w, z\}$, wenn wir mit $2z^2$ multiplicieren und $z=\infty$ setzen nach (13) den Wert $1-\nu^2$ erhalten; das verlangt $b=-a$ und liefert dadurch

$$2a = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1;$$

die gesuchte Differentialgleichung ist also

$$\left\{w, z\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{1-\mu^2}{(z-1)^2} + \frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{z(z-1)}\right). \tag{15}$$

Die von *Gauss* zuerst untersuchte sogenannte hypergeometrische Reihe

Digitized by Google

$$y=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

genügt der Differentialgleichung

$$x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0, \tag{16}$$

deren Invariante für

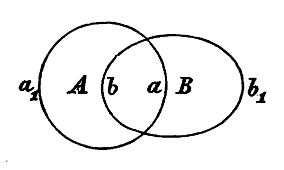
$$\lambda^2=(1-\gamma)^2,\ \mu^2=(\alpha-\beta)^2,\ \nu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2$$

gerade die Hälfte der Grösse auf der rechten Seite in (15) ausmacht. Mithin:

Die Abbildung einer Halbebene auf ein Kreisbogendreieck wird durch eine Funktion ausgeführt, die sich darstellen lässt als das Verhältnis zwischen zwei partikulären Integralen der Gaussischen Differentialgleichung.

VERSCHMELZUNG VON POTENTIALEN.

108. Kann man die Randwertaufgabe für zwei Flächenstücke lösen, so kann man sie auch durch eine von *Schwarz* angegebene Ausgleichungsmethode (alternierendes Verfahren)[1]) für das Flächenstück lösen, das gebildet wird, wenn man die beiden Flächenstücke in einander greifen lässt.



Die beiden Flächenstücke seien A und B; die Begrenzung des ersten ist a_1+a, die des zweiten b_1+b, wo a und b die Begrenzung des gemeinsamen Flächenstücks bilden, so dass a ganz in B und b ganz in A liegt; der Einfachheit wegen wollen wir voraussetzen, dass sich nicht zwei von den Stücken der Begrenzung berühren. Die Begrenzung des zusammengesetzten Flächenstückes besteht aus den Stücken a_1 und b_1, deren Punkten gegebene reelle Werte entsprechen, die eine stetige Wertreihe bilden; wir wollen voraussetzen, dass der kleinste der Werte 0, der grösste g sei, was sich immer durch Addition einer Konstanten erreichen lässt.

[1]) *Neumanns* Kombinationsmethode ist im wesentlichen dieselbe.

Digitized by Google

Auf a bringen wir überall den Wert Null an; wir können dann die Randwertaufgabe für A lösen und erhalten dadurch ein Potential[1]) u_1 bestimmt, das seinerseits eine stetige Wertreihe für die im Flächenstücke liegende Linie b bestimmt; diese Wertreihe und die für b_1 gegebene Wertreihe bestimmen für B ein Potential u_2, das eine neue Wertreihe für a liefert; diese und die gegebene Wertreihe für a_1 bestimmen für A ein neues Potential u_3; wenn wir auf diese Weise fortfahren, so werden nach und nach für A die Potentiale $u_1, u_3, u_5 \dots$ gebildet, für B die Potentiale $u_2, u_4, u_6 \dots$. Wir haben zu beweisen, dass dieses Verfahren dazu dient, das gesuchte Potential als einen Grenzwert zu bestimmen. Um das zu erreichen, müssen wir zuerst einen Hülfsatz beweisen.

Auf a_1 wollen wir überall den Wert 0 anbringen, auf a den Wert 1. Dadurch wird ein Potential v bestimmt, dessen Werte innerhalb des Randes überall zwischen 0 und 1 liegen. Für einen inneren Punkt von b hat deshalb das Potential einen Wert, der einen positiven echten Bruch darstellt, und dasselbe gilt für die Endpunkte von b, da diese Linie nach unserer Voraussetzung weder a noch a_1 berührt. (102).

Wir können deshalb einen positiven echten Bruch α angeben, der grösser ist als jeder Wert, den das Potential auf b erlangen kann.

Nun ersetzen wir die Werte 1 auf a durch andere positive Werte, die alle kleiner sind als eine Zahl k, und bestimmen das den neuen Werten entsprechende Potential v_1. Die Funktion $kv-v_1$ stellt dann ein Potential dar, das in keinem Randpunkt negativ ist, und deshalb auch nicht in irgendwelchem inneren Punkt. Für jeden Punkt von b hat v_1 also einen positiven Wert, der kleiner ist als $k\alpha$. Für das Stück a bestimmen wir auf ähnliche Weise einen α analogen echten Bruch β. Nun hat man:

u_1 ist auf a_1 kleiner als g, auf a Null, also auf b kleiner als g.
u_2 ist auf b gleich u_1, auf b_1 kleiner als g, also auf a kleiner als g.
u_3 ist auf a gleich u_2, also kleiner als g.

[1]) In dieser Entwickelung werden die Potentiale immer als eindeutig und stetig angenommen.


Digitized by Google

$u_3 - u_1$ ist auf a_1 gleich Null, auf a kleiner als g, also auf b kleiner als αg.

$u_4 - u_2$ ist auf b_1 gleich Null, auf b gleich $u_3 - u_1$, also auf a kleiner als $\alpha\beta g$.

$u_5 - u_3$ ist auf a_1 gleich Null, auf a gleich $u_4 - u_2$, also auf b kleiner als $\alpha^2 \beta g$.

Wenn wir auf diese Weise fortfahren, so finden wir, dass $u_{2n+2} - u_{2n}$ ein Potential darstellt, das für das Flächenstück B definiert ist und den Wert Null auf b_1 hat, während es auf b und deshalb im ganzen Flächenstück Werte hat, die kleiner sind als $\alpha(\alpha\beta)^{n-1} g$. Auf ähnliche Weise ist $u_{2n+1} - u_{2n-1}$ definiert für A, ist Null auf a_1, und auf a und deshalb im ganzen Flächenstück kleiner als $(\alpha\beta)^{n-1} g$. Wir können dann zwei unendliche Reihen bilden, die jede in ihrem Flächenstück unbedingt und gleichmässig konvergent sind, da ihre Glieder kleiner sind als die entsprechenden Glieder einer Quotientenreihe, deren Quotient ein echter Bruch ist. Diese Reihen sind

$$u' = u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \ldots,$$
$$u'' = u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \ldots.$$

Wir bilden nun ein Potential u, das auf a_1 die gegebenen Werte hat und auf a mit u' übereinstimmt. $u - u_{2n-1}$ hat dann auf a_1 den Wert Null, und auf a, also im ganzen Flächenstück A, Werte, die gegen Null konvergieren, wenn n bis ins Unendliche wächst. u und u' sind also identisch für alle Punkte von A, und u' genügt deshalb in diesem Flächenstück der Gleichung $\triangle u' = 0$. Auf dieselbe Weise zeigt man, dass man in B hat: $\triangle u'' = 0$.

Die Potentiale u' und u'' haben dieselben Werte auf a und b, und genügen beide den Gleichungen $\triangle = 0$ in dem für A und B gemeinsamen Flächenstück; da dieses die Begrenzung $a + b$ hat, so haben die beiden Potentiale dieselben Randwerte und sind deshalb identisch, so dass u' für A und u'' für B Teile desselben Potentials darstellen, das für das ganze von a_1 und b_1 begrenzte Flächenstück der Gleichung $\triangle = 0$ genügt und die gegebenen Randwerte hat.

Digitized by Google

Das Flächenstück kann nun nach und nach auf ähnliche Weise erweitert werden; man kann dadurch z. B. alle Flächenstücke bilden, die von Geraden und Kreisbogen begrenzt sind, und daraus folgt dann die Möglichkeit der früher bei diesen erwähnten Bestimmung der Konstanten.

Da eine kreisförmige Schraubenfläche um einen Verzweigungspunkt und eine Kugelkalotte sich konform auf einem Kreise abbilden lassen, so kann man die Randwertaufgabe für Teile einer *Riemann*schen Kugelfläche lösen, die durch Überdeckung von ein- und mehrblättrigen Kalotten gebildet werden können. Im besonderen wollen wir uns denken, dass wir in einem der Blätter einen Kreis zeichnen; die Aufgabe lässt sich dann nicht nur für die vom Kreise begrenzte einblättrige Kalotte lösen, sondern auch dann, wenn man den Kreis so betrachtet, als ob er den ganzen übrigen Teil der mehrblättrigen Kugel begrenzt.

Die dem Potential entsprechende monogene Funktion erhält rein imaginäre Differenzen in den Schnitten, die man ausführen muss, um die Fläche einfach zusammenhängend zu machen, denn der imaginäre Teil der Funktion wird durch ein Integral bestimmt, das nur auf der einfach zusammenhängenden Fläche eindeutig ist.

BESTIMMUNG DURCH UNSTETIGKEITSBEDINGUNGEN.

109. *Cauchy* hatte in Wirklichkeit eine sichere und vollständige Grundlage für die ganze moderne Funktionstheori geschaffen, aber er ging bei seinen Untersuchungen nicht über die Betrachtung von Funktionen hinaus, die durch analytische Ausdrücke bestimmt waren. *Riemann* war es, der in seiner berühmten Dissertation[1]) sich zu Betrachtungen von Funktionen erhob, die nur durch die notwendige und ausreichende Anzahl von Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen bestimmt waren. Wir haben bereits die Bestimmung durch Grenzbe-

[1]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse. Göttingen 1851. 4°; 2. Abdruck, ebd. 1867. — *B. Riemanns* gesammelte mathematische Werke, hrgg. v. H. Weber. Leipzig 1876. S. 3.


Digitized by Google

dingungen betrachtet, wollen aber jetzt die Aufgabe etwas allgemeiner stellen.

Während wir früher bei der Untersuchung algebraischer Funktionen und ihrer Integrale von einer gegebenen Funktion ausgingen und deren *Riemann*sche Fläche konstruirten, wollen wir uns jetzt eine beliebige geschlossene *Riemann*sche Fläche mit ihren Verzweigungspunkten und Verzweigungsschnitten gegeben denken und untersuchen, ob es algebraische Funktionen giebt, zu denen eben diese *Riemann*sche Fläche gehört. Es scheint jedoch, dass die Aufgabe leichter wird, wenn man den Blick nicht auf die algebraischen Funktionen selbst, sondern auf ihre Integrale richtet. Wir machen deshalb die Fläche durch ein passendes System von Querschnitten einfach zusammenhängend; wir haben gesehen, dass diese die Form eines mit Doppelhenkeln versehenen Kreises annehmen können, oder, da der Kreis unendlich klein gemacht werden kann, eines Systems von zusammenhängenden Kurvenpaaren von der Form, wie die Figur auf S. 60 zeigt. Auf der Fläche denken wir uns gewisse gegebene Punkte, in denen die Funktion unendlich werden soll wie gewisse gegebene Funktionen, so für $z=z_0$ wie

$$(17)\quad f(z)=al(z-z_0)+\frac{b}{z-z_0}+\frac{c}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{k}{(z-z_0)^p},$$

wo $a, b, \ldots k$, gegebene komplexe Konstanten bedeuten; ist $a=0$, so muss die Funktion also einen Pol in z_0 haben, während sie im entgegengesetzten Falle logarithmisch unendlich in diesem Punkt sein muss. Die Werte a, die den verschiedenen Punkten entsprechen, sollen die Summe Null haben.

Wir verlangen nun ferner, dass die Funktion auf den beiden Seiten jedes Querschnittes konstante Differenzen haben soll, deren reeller Teil beliebig gegeben ist, und dass sie im übrigen auf der ganzen Kugel eindeutig und stetig ist.

Neumann stellt nur diese Bedingungen auf, aber in Wirklichkeit reichen sie nicht aus, um die Funktion als ein *Abel*sches Integral zu bestimmen; wir haben nämlich zu beachten, dass die Unstetigkeit in einem Querschnitt nur formell ist, da sie davon herrührt, dass wir nur eins von den unendlich vielen

Digitized by Google

Blättern in der *Riemann*schen Fläche in der Integralfunktion benutzen und dadurch ein Überschreiten des Querschnittes verhindern; gehen wir über diesen hinauf in das nächste Blatt, so giebt es keine Singularität bei den Punkten des Schnittes. Zu den gestellten Bedingungen muss deshalb diejenige hinzugefügt werden, dass die Funktion in den Punkten des Querschnittes monogen sein soll, wenn wir zu ihren Werten auf der einen Seite die konstante Differenz addieren.

Wir wollen nun annehmen, dass es uns gelingt, eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften zu bestimmen; ihre Abgeleitete wird dann auf der ganzen Kugel eindeutig und stetig sein, ausgenommen in einzelnen Punkten, wo sie Pole hat[1]; si ist also eine algebraische Funktion. (84.)

Zu dieser Funktion kann, wie wir in (17) gesehen haben, in besonderen Fällen eine einfachere *Riemann*sche Fläche gehören, aber dieser Fall kann nicht eintreten, wenn die Integralfunktion mit ihrer vollen Anzahl von Periodicitätsmoduln bestimmt ist.

110. Wenn wir nunmehr zu der Lösung unserer Aufgabe übergehen, so sehen wir sofort, dass diese sich in hohem Grade vereinfachen lässt. So brauchen wir nur einen Querschnitt zu betrachten, ja sogar nur einen unendlich kleinen Teil eines solchen, denn die Funktion lässt sich durch Addition aus anderen bilden, die jede für sich auf die gegebene Weise unstetig sind in einem der Querschnitte oder in einem Teil eines Querschnittes, im übrigen aber stetig. Auf dieselbe Weise erkennen wir, dass wir nur einen der Unstetigkeitspunkte zu betrachten brauchen, und dass die in einem solchen Punkte unstetige Funktion sich durch Addition bilden lässt aus anderen, von denen jede nur unendlich ist wie eins von den Gliedern in (17); es muss jedoch, wenn die Funktion in einem der Punkte logarithmisch unendlich sein soll, andere ähnliche Punkte von der Art geben, dass die Summe der Residuen der Punkte Null ist.

---

[1]) Zu den Polen der Funktion kommen für die Abgeleitete solche Verzweigungspunkte, für welche die Reihenentwickelung der Funktion mit Exponenten zwischen 0 und 1 beginnt.


Digitized by Google

Durch eine passende Zerlegung von einigen Residuen der Punkte kann man dafür sorgen, dass man jedesmal nur zwei Punkte mit der Residuensumme Null zu betrachten braucht. Die Linie, welche die beiden Punkte verbindet, können wir uns ferner so kurz denken, wie wir wollen, da eine längere Verbindungslinie sich immer derartig teilen lässt, dass man gleich grosse und entgegengesetzte Residuen in die Teilungspunkte einschiebt. Ersichtlicher Weise können wir also immer voraussetzen, dass sich in einem einzelnen Blatte eine Kalotte abschneiden lässt, die alle Unstetigkeitspunkte enthält; liegt ein solcher in einem Verzweigungspunkt, so kann man sich diesen durch eine konforme Abbildung fortgeschafft denken.

Durch die gestellten Bedingungen ist eine Funktion bis auf eine Konstante vollkommen bestimmt, denn hätte man zwei Funktionen mit denselben Unstetigkeiten, so würde ihre Differenz eindeutig und stetig auf der ganzen Kugel sein mit rein imaginären Differenzen in den Schnitten. Eine solche Funktion ist jedoch eine Konstante, denn ihr reeller Teil ist ein Potential, das eindeutig und stetig auf der ganzen Kugel ist; der Wert dieses Potentials muss auf der ganzen Kugel zwischen dem grössten und dem kleinsten Werte liegen, den es auf einer beliebigen unendlich kleinen Kreisperipherie erhält, da diese als Randkurve genommen werden kann; dann muss es aber konstant sein, und dieser Umstand bringt mit sich, dass der imaginäre Teil der Funktion auch konstant ist.

111. Wir wollen nun versuchen ein Potential zu bestimmen, das eindeutig und stetig auf der gegebenen *Riemann*schen Kugelfläche ist, ausgenommen in gewissen Punkten oder Strecken, in denen es unstetig ist wie der reelle Teil u einer gewissen Funktion $f(z) = u + iv$; wir können uns, wie in 110 gezeigt ist, denken, dass alle Unstetigkeiten auf einer einblättrigen Kalotte liegen; diese bilden wir auf einer Ebene ab als einen Kreis mit dem Radius r_2 und zeichnen einen dazu koncentrischen Kreis mit dem Radius $r_1 > 3 r_2$; dieser entspricht einem gewissen Kreise auf der Kugel; wir ziehen es jedoch vor, die konforme Abbildung der Kugelfläche in der Ebene zu betrachten.

Digitized by Google

Nun seien die beiden Kreisperipherien S_2 und S_1. Das von S_1 begrenzte Flächenstück, *welches den Mittelpunkt enthält*, nennen wir T_2 und das von S_2 begrenzte Flächenstück, *welches den Mittelpunkt nicht enthält*, nennen wir T_1. S_1 liegt dann in T_1 und S_2 in T_2. Wie früher gezeigt (108), können wir die Randwertaufgabe für die Flächenstücke T_1 und T_2 lösen.

Wir können uns nun, um die gesuchte Funktion zu bestimmen, des alternierenden Verfahrens bedienen, aber dabei stossen wir auf eine besondere Schwierigkeit bei dem Beweise für die Konvergenz der gebildeten Reihen. Diese überwinden wir, indem wir dafür sorgen, dass die Potentiale, die wir betrachten, immer auf S_1 und S_2 die Mittelwerte Null haben. Wir wollen annehmen, dass wir in T_2 ein eindeutiges und stetiges Potential haben, das auf S_1 den Mittelwert Null hat. Dann können wir, ohne dass Potential zu verändern, in (2) $R-1$ statt R setzen; liegt der Punkt (x, y) im Abstande r vom Mittelpunkt, so wird der Zähler in R gleich $(r_1+r)(r_1-r)$, während der Nenner grösser ist als $(r_1-r)^2$; wir erhalten deshalb $R-1$ kleiner als $\frac{2r}{r_1-r}$, also für Punkte auf S_2 kleiner als ein gewisser echter Bruch α. Ist g die obere numerische Grenze für die Werte des Potentials auf S_1, so ist also αg eine obere numerische Grenze für die Werte auf S_2.

Nun wollen wir annehmen, u sei ein auf dem Kreisringe eindeutiges und stetiges Potential von solcher Beschaffenheit, dass die Funktion $f(z)=u+iv$ auch eindeutig und stetig auf dem Kreisringe ist; dasselbe wird dann für $f(z):2\pi iz$ gelten, und das Integral dieser Funktion muss dann dasselbe Resultat geben für den Integrationsweg S_1 wie für den Weg S_2. Man erkennt indessen leicht, wenn man Polarkoordinaten einführt, dass der reelle Teil des Integrals eben der Mittelwert des Potentials ist, und dieser ist also derselbe für beide Kreise.

Von der gegebenen Funktion $u+iv$, welche die Unstetigkeiten der gesuchten Funktion bestimmt, können wir, wie oben angeführt, annehmen, dass sie alle ihre Unstetigkeiten innerhalb S_2 habe; dann ist sie eindeutig auf dem Kreisringe; da ein konstantes Glied keinen Einfluss auf die Unstetigkeiten hat,

Digitized by Google

so können wir voraussetzen, dass u den Mittelwert Null auf der einen Kreisperipherie hat und deshalb auch auf der anderen. Wenn wir im Folgenden Potentiale bilden, die eindeutig und stetig im Kreise T_2 sind, und auf S_1 den Mittelwert Null haben, so muss dasselbe für S_2 gelten; bilden wir Potentiale, die eindeutig und stetig auf T_1 sind, und auf S_2 den Mittelwert Null haben, so muss das auch für S_1 gelten; die entsprechende Funktion wird allerdings, da v als ein Integral bestimmt wird, in der Regel konstante, rein imaginäre Differenzen in den Querschnitten der Fläche haben, aber diese können wir uns immer so geführt denken, dass sie nicht in den Kreisring hineinkommen, und die Funktion wird dann in diesem eindeutig und stetig sein. Nach diesen Bemerkungen ist es nicht notwendig im Folgenden darauf aufmerksam zu machen, dass jedes Potential, das wir konstruiren, den Mittelwert Null auf beiden Kreisen hat. Unter $u(r_1)$ verstehen wir die Werte des Potentials u auf dem Kreise S_1 u. s. w. Es wird stets angenommen, dass die Potentiale eindeutig und stetig sind.

Nun konstruieren wir:

u_1 auf T_1, so dass u_1 auf S_2 gleich ist $u(r_2)$.

u_2 auf T_2, so dass u_2 auf S_1 überein stimmt mit $u_1 - u(r_1)$. Der grösste numerische Wert von u_2 auf S_1 sei g; dann ist er auf S_2 kleiner als αg.

u_3 auf T_1, so dass, längs S_2, $u_3 = u_2 + u(r_2)$; auf S_2 und deshalb in ganz T_1 ist dann der numerische Wert von $u_3 - u_1$ kleiner als αg.

u_4 auf T_2, so dass, längs S_1, $u_4 = u_3 - u(r_1)$. Der numerische Wert von $u_4 - u_2$ ist dann auf S_1 kleiner als αg, auf S_2 kleiner als $\alpha^2 g$.

Auf diese Weise fahren wir fort und bilden, ganz wie auf S. 216, zwei konvergente Reihen, welche die eindeutigen und stetigen Potentiale

$$u' = \lim u_{2n+1} \text{ und } u'' = \lim u_{2n},$$

bestimmen, die beziehungsweise für T_1 und T_2 gelten. Die Potentiale

$$u' \text{ und } u'' + u(r)$$

sind dann beide eindeutig und stetig auf dem Kreisringe, und sie müssen überall in diesem übereinstimmen, da sie gleiche Werte auf den beiden Kreisen haben. Sie bilden also zusammen ein Potential, das überall eindeutig und stetig ist, ausgenommen an den Stellen, wo u unstetig ist, und da verhält es sich wie u. Bilden wir die entsprechende Funktion $\varphi(z)$, so wird diese eindeutig und stetig auf der ganzen Fläche sein, ausgenommen da, wo $f(z)$ unstetig ist, und da wird $\varphi(z) - f(z)$ stetig sein, und ausgenommen in den Querschnitten, wo konstante, rein imaginäre Differenzen vorkommen können. An diesen Stellen ist indessen die Unstetigkeit, da sie von einem Integral herrührt, nur formell in der früher angegebenen Bedeutung.

112. Im besonderen können wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} l \frac{z-a}{z-b}$$

setzen, wo a und b zwei Punkte bedeuten, die innerhalb S_2 belegen sind. Der reelle Teil dieser Funktion ist ein Potential, das eindeutig und stetig in T_2 ist, ausgenommen auf einer Linie, die a und b verbindet; auf dieser hat es die konstante Differenz 1. Da wir ab nach und nach mit allen Teilen der Querschnitte zusammenfallen lassen können, so können wir durch Multiplikation mit passenden Konstanten und Addition Potentiale bilden, die gegebene konstante Differenzen auf allen Querschnitten haben. Indem wir zu den Funktionen übergehen, haben wir also die *Riemann*schen Existenztheoreme:

Es existieren auf einer beliebig gegebenen, geschlossenen Riemannschen Fläche Funktionen, die eindeutig und stetig auf der ganzen Fläche sind, ausgenommen auf den Schnitten, wo sie konstante Differenzen mit beliebig gegebenen, reellen Teilen haben, wo die Unstetigkeit doch nur formell ist. Diese Funktionen sind Abelsche Integrale erster Art.

Digitized by Google

Es existieren Funktionen, die denselben Bedingungen genügen, aber ausserdem auf gegebene Weise in gegebenen Punkten polar unendlich sind; diese Funktionen sind Abelsche Integrale zweiter Art.

Es existieren Funktionen, die denselben Bedingungen genügen, aber ausserdem logarithmisch unendlich in gegebenen Punkten sind, jedoch so, dass deren Residuensumme Null ist; diese Funktionen sind Abelsche Integrale dritter Art.

Digitized by Google

ZWEITER ABSCHNITT.

SPECIELLE FUNKTIONEN.

Digitized by Google

Digitized by Google

KAPITEL I.

DIE FUNKTIONEN $\Gamma(z)$ UND $\zeta(z)$.

DIE FUNKTION $\Gamma(z)$.

1. Gehen wir aus von *Gauss*' Definition

$$\Gamma(z) = \lim \frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}, \tag{1}$$

so erhalten wir

$$\Gamma(z+1) = \lim \frac{n^{z+1}}{(z+1)\left(1+\frac{z+1}{1}\right)\left(1+\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z+1}{n}\right)},$$

und hieraus, da

$$1+\frac{z+1}{p} = \frac{p+1}{p}\left(1+\frac{z}{p+1}\right),$$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim \frac{nz}{(n+1)\left(1+\frac{z}{n+1}\right)} = z,$$

mithin

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{2}$$

Da aus (1) hervorgeht, dass $\Gamma(1)=1$, so erhält man aus (2): $\Gamma(2)=1$; $\Gamma(3)=1\cdot 2$; ... $\Gamma(n+1)=n!$

Ferner ist

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = -\Gamma(z)\,z\,\Gamma(-z) = \frac{1}{z}\left[\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\right]^{-1},$$

mithin (*Euler*)

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{3}$$

Digitized by Google

woraus $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, also $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$; $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ u. s. w.

Aus (1) folgt, dass $\sqrt{\pi}$ hier den positiven Wert bedeutet, denn unter n^s verstehen wir $e^{s\,ln}$, wo ln den positiven Wert des Logarithmus bezeichnet.

2. Setzen wir

$$P = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right),$$

wo p eine ganze Zahl bedeutet, so erhalten wir

$$P^2 = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$= \frac{\pi^{p-1}}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{2\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{p}\pi}.$$

Hier sind die Faktoren des Nenners, wenn man sie mit 2 multipliciert, die Moduln der linearen Faktoren von $\frac{x^p-1}{x-1}$, wenn man in diesen $x=1$ setzt; man erhält deshalb

$$P = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}}\,p^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Diese Formel lässt sich erweitern. Man hat identisch

$$1 + \frac{a+\frac{r}{p}}{q} = \left(1 + \frac{pa}{pq+r}\right)\left(1 + \frac{\left(\frac{r}{p}\right)}{q}\right);$$

für $q = 0$ ersetzen wir diese Idendität jedoch durch

$$a + \frac{r}{p} = \left(1 + \frac{pa}{r}\right)\frac{r}{p}.$$

Wir geben nun q die Werte 0, 1, 2 ... n und für jeden von diesen r die Werte 0, 1, 2 ... $p-1$, und multiplicieren auf beiden Seiten. Auf der linken Seite erhalten wir dann

Digitized by Google

eben die Faktoren, die sich im Nenner finden, wenn wir die *Gauss*ische Formel auf das Produkt

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right)$$

anwenden, während der Zähler $n^{pa+\frac{1}{2}(p-1)}$ wird. Auf der rechten Seite erhalten wir den Nenner im Produkte $\Gamma(pa)\cdot P$; dabei fehlt jedoch ein Faktor p, und für n in $\Gamma(pa)$ haben wir $pn+p-1$ genommen. Der Zähler wird $(pn+p-1)^{pa}n^{\frac{1}{2}(p-1)}$. Dividieren wir mit dem letzten Produkt in das erste, und lassen wir n bis ins Unendliche wachsen, so wird das Resultat p^{-pa+1}, und dadurch finden wir, wenn der oben gefundene Wert für P eingesetzt wird,

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right)=\left(2\pi\right)^{\frac{p-1}{2}}p^{\frac{1}{2}-ap}\,\Gamma(pa). \tag{5}$$

Die hier entwickelten Formeln rühren von *Gauss* her.

Für $a=\frac{z}{2}$, $p=2$, erhalten wir eine Formel, die später angewandt werden wird:

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)=2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z). \tag{6}$$

3. Aus (1) erhalten wir, wenn

$$C=\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}-l n\right)$$

die *Euler*sche Konstante bedeutet,

$$\begin{aligned} -l\Gamma(z)=Cz+lz+\left[l\left(1+\frac{z}{1}\right)-\frac{z}{1}\right]+\left[l\left(1+\frac{z}{2}\right)-\frac{z}{2}\right]+\ldots\\ \ldots+\left[l\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]+\ldots; \end{aligned} \tag{7}$$

diese Reihe ist konvergent in der ganzen Ebene, ausgenommen in den Punkten 0, -1, $-2,\ldots$, und liefert die von *Weierstrass* zuerst gefundene Zerlegung in primäre Faktoren

Digitized by Google

(8) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{C_0 z} z \Pi \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

gültig für die ganze Ebene. Die Funktion $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ist also eine ganze transcendente Funktion mit den Nullpunkten $0, -1, -2, \ldots$, während diese Punkte Pole für $\Gamma(z)$ sind. Die Residuen von diesen findet man, wenn man wie *Prym* die Funktion in zwei Teile zerlegt, von denen der eine stetig in der ganzen Ebene ist, während der andere die Pole enthält; man erhält diese Teile, wenn man die Integraldefinition benutzt und das Integral in zwei andere zerlegt, nämlich

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx \text{ und } P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx.$$

Von diesen ist das erste holomorph in der ganzen Ebene; aus dem zweiten erhält man, wenn man e^{-x} in einer Reihe entwickelt,

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1\cdot(z+1)} + \frac{1}{1\cdot 2\,(z+2)} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,(z+3)} + \ldots;$$

diese Reihe bestimmt eine für die ganze Ebene eindeutige Funktion, die sich in den Polen $0, -1, -2 \ldots$ wie $\Gamma(z)$ verhält. Aus der Formel geht hervor, dass das Residuum für den Pol $-n$

$$(-1)^n \frac{1}{n!}$$

ist.

4. Aus (1) finden wir

(9) $$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim \left[ln - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \cdots - \frac{1}{z+n}\right].$$

Wir können jedoch einen anderen Ausdruck für diese Funktion finden, wenn wir

$$\int \frac{\frac{1}{z+t}}{e^{2\pi i t} - 1}\, dt$$

betrachten, wo das Integral in positiver Richtung längs einer Kurve zu nehmen ist, die durch die Punkte 0 und n geht und die Punkte 1, $2 \ldots n-1$ einschliesst.

Wir setzen zunächst voraus, dass der reelle Teil von z positiv ist, so dass der Zähler des Bruches nicht innerhalb der Integrationskurve unendlich wird; der Wert des Integrals ist dann

$$\frac{1}{2z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \cdots + \frac{1}{2(z+n)}.$$

Ist dagegen der reelle Teil von z negativ, und erweitern wir den Integrationsweg wie Seite 162, so liegt der Punkt $t = -z$ innerhalb dieses Weges; zu diesem Punkte gehört dann das Residuum $\frac{1}{e^{-2\pi i z}-1}$, so dass diese Grösse, multipliciert mit $2\pi i$, zu den oben stehenden Gliedern hinzuzufügen ist.

Nun haben wir (S. 163) das Integral als eine Summe von zwei anderen ausgedrückt; das eine von diesen ist

$$\int_0^n \frac{dt}{z+t} = l(z+n) - lz.$$

Um diese Logarithmen genauer zu bestimmen, haben wir zu beachten, dass der Integrationsweg von 0 bis n ursprünglich von 0 bis $+\infty i$ und von da nach n ging, dass er sich jedoch in den geradlinigen Weg von 0 bis n zusammenziehen liess, da wir dabei keinen singulären Punkt überschritten. Das gilt indessen hier nicht, wenn der Punkt $-z$ im ersten Quadranten liegt; in diesem Falle müssen wir den Weg aussen um diesen Punkt herumgehen lassen. Setzen wir $z + t = re^{\theta i}$, also $dt = ire^{\theta i} d\theta + e^{\theta i} dr$, so erhalten wir durch die Integration

$$l|z+n| - l|z| + \theta i = l\frac{|z+n|}{n} + ln - l|z| + \theta i,$$

wo θ den Winkel bedeutet, um den die Linie von $-z$ bis t sich gedreht hat, während t von 0 nach n ging. Lassen wir n bis ins Unendliche wachsen, so konvergiert das erste Glied


Digitized by Google

nach 0, und θ ist der Winkel von der Richtung $-z, 0$ nach der Richtung $-z, +\infty$; die erste Richtung ist dieselbe wie die von 0 nach z, $-\theta$ ist also das Argument von z. Betrachtet man eine Figur, und beachtet man, dass t der Axe der reellen Zahlen von 0 bis $+\infty$ folgen soll, ausgenommen wenn $-z$ im ersten Quadranten liegt, so findet man, dass der Wert von Arg. z, den man benutzen soll, derjenige ist, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{3\pi}{2}$ liegt; setzen wir $l|z| - \theta i = lz$, so folgt hieraus, dass der Wert dieses Logarithmus dadurch bestimmt wird, dass er reell sein soll für positive z und ferner stetig so bestimmt wird, dass z nicht den negativen Teil der Axe der imaginären Zahlen überschreiten darf.

Wir erhalten nun unter Benutzung der Formel auf S. 163 und mit der angenommenen Bedeutung von lz:

$$(10) \qquad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = lz - \frac{1}{2z} - 2\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(z^2+y^2)(e^{2\pi y}-1)} + \begin{cases} 0 & R.z \text{ pos.} \\ \dfrac{2\pi i}{e^{-2\pi i z}-1} & R.z \text{ neg.} \end{cases}$$

Das Integral ist unbenutzbar, wenn z auf der Axe der imaginären Zahlen liegt, und es bestimmt auf den beiden Seiten dieser zwei verschiedene Funktionen, deren Unterschied durch die hinzugefügten Glieder ausgedrückt wird. Es bleibt unverändert, wenn z mit $-z$ vertauscht wird, und dadurch erhält man, wenn man den reellen Teil von z als positiv annimmt,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(-z)}{\Gamma(-z)} = -\frac{1}{z} - \pi i - \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1} = -\frac{1}{z} - \pi \cot \pi z,$$

ein Resultat, dass sich auch leicht aus *Eulers* Formel ableiten lässt.

Setzen wir $z = x + iy$, so erhalten wir aus (9), wenn wir die Funktion durch ψ bezeichnen

$$\psi(x+iy) = \lim\left(ln - \sum_0^n \frac{x+n}{(x+n)^2+y^2}\right) + iy\sum_0^\infty \frac{1}{(x+n)^2+y^2}.$$

Man ersieht hieraus, das die Nullpunkte alle reell sind, zu ihrer Bestimmung hat man:

Digitized by Google

$$\psi(x) = \lim\left(ln - \sum_0^n \frac{1}{x+n}\right) = 0.$$

Für positive x ist diese Grösse mit x wachsend, und da $\psi(1) = -C$ negativ, $\psi(2) = 1 - C$ positiv ist, so giebt es nur eine positive Wurzel, und diese liegt zwischen 1 und 2. *Legendre* hat für ihren Wert 1,46163 ... gefunden. Die Abgeleitete von $\psi(x)$ ist positiv und die Funktion daher von einem Pole bis an den folgenden immer von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsend, so dass sich zwischen zwei Polen immer ein Nullpunkt finden muss.

Setzen wir einen solchen gleich $-m + \alpha$, wo m eine ganze Zahl und α ein echter Bruch ist, und denken wir uns m so gross, dass wir von Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{m}$ absehen können, so erhalten wir aus (10) zur Bestimmung von α

$$\pi \cot \alpha\pi = lm.$$

Wenn $|z|$ bis ins Unendliche wächst, so wird das Restintegral in (10) unendlich klein von zweiter Ordnung, und das für einen negativen reellen Teil von z hinzugefügte Glied wird im zweiten Quadranten 0, im dritten aber $-2\pi i$; nehmen wir dieses Glied mit hinein in lz, so wird die Unstetigkeitslinie nach dem negativen Teil der Axe der reellen Zahlen verlegt, und wir erhalten für unendlich ferne Punkte z, abgesehen von Gliedern von höherer als erster Ordnung,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = lz - \frac{1}{2z}, \tag{11}$$

wo der Logarithmus reell ist für positive z und sich von dort aus stetig so ändert, dass z den negativen Teil der Axe der reellen Zahlen nicht überschreitet.

5. Wir wollen nun aus (10) eine neue Formel ableiten, indem wir mit dz multiplicieren und von 1 bis z integrieren. Nun ist $\Gamma(1) = 1$, und wir erhalten dann für einen positiven reellen Teil von z:

$$l\Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2})lz - z + 1 + 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z}}{e^{2\pi y} - 1}\, dy - 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} y}{e^{2\pi y} - 1}\, dy.$$


Digitized by Google

Das erste Integral verschwindet für $z = \infty$, und die früher für ganze positive z abgeleite Formel (S. 168) zeigt dann, nachdem man n mit $n-1$ vertauscht hat und da $\Gamma(n) = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-1)$, dass man haben muss:

$$1 - 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} y}{e^{2\pi y}-1}\,dy = \tfrac{1}{2} l 2\pi,$$

und deshalb für alle z mit positivem reellem Teil:

$$(12) \qquad l\Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\, lz - z + \tfrac{1}{2} l 2\pi + 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z}}{e^{2\pi y}-1}\,dy.$$

Ist der reelle Teil von z negativ, so findet man die Formel am leichtesten durch Benutzung von *Eulers* Formel, die sich schreiben lässt:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z \sin \pi z}; \; l\Gamma(z) + l\Gamma(-z) = l\pi - l(-z) - l \sin \pi z.$$

Setzt man hierin den obenstehenden Ausdruck ein und vertauscht darauf z mit $-z$, so findet man:

$$(13)\; l\Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\, l(-z) - l\sin \pi z - z + \tfrac{1}{2} l \frac{\pi}{2} + 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z}}{e^{2\pi y}-1}\,dy;$$

diese Formel gilt also, wenn der reelle Teil von z negativ ist.

Unsere Formeln gelten nicht für $z = ki$, wo k reell ist; man erhält indessen

$$(14) \qquad \Gamma(ki)\,\Gamma(-ki) = \frac{-\pi}{ki \sin \pi ki} = \frac{2\pi}{k(e^{k\pi} - e^{-k\pi})};$$

dieser Ausdruck bestimmt, da die beiden Faktoren auf der linken Seite konjugierte komplexe Grössen sind, das Quadrat ihres Modulus. Dieser, der unendlich ist, für $k = 0$, erweist sich also als stark abnehmend, wenn der Punkt sich auf der Axe der imaginären Zahlen entfernt.

Digitized by Google

6. Man kann $\log \Gamma(z+1)$ in einer Potenzreihe vom Punkte 0 aus entwickeln, und diese Reihe erhält den Konvergenzradius 1, da -1 der nächste singuläre Punkt ist. Aus (7) erhält man

$$l\,\Gamma(z)+l\,z=l\,\Gamma(z+1)=-Cz-\left[l\left(1+\frac{z}{1}\right)-\frac{z}{1}\right]-\left[l\left(1+\frac{z}{2}\right)-\frac{z}{2}\right]-\cdots$$

Entwickeln wir hier die einzelnen Glieder, und setzen wir

$$s_r=1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots,$$

so erhalten wir für $|z|<1$

$$l\,\Gamma(z+1)=-Cz+\tfrac{1}{2}s_2z^2-\tfrac{1}{3}s_3z^3+\tfrac{1}{4}s_4z^4-\ldots. \tag{15}$$

Die Grössen s_r sind auf 32 Decimalstellen berechnet bis $r=70$.[1])

DIE FUNKTION $\zeta(z)$.

7. Die Funktion $\zeta(z)$ lässt sich, wenn der reelle Teil von z grösser als 1 ist, definieren durch

$$\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \tag{16}$$

Eine andere Definition erhält man, wenn man in die Formel

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{z-1}\,dx=\frac{1}{n^z}\Gamma(z)$$

für n nach und nach 1, 2, 3 ... setzt und addiert; dadurch erhält man

$$\Gamma(z)\zeta(z)=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{e^x-1}\,dx.$$

Riemann hat hieraus eine andere Form abgeleitet, die für die ganze Ebene gilt; er betrachtet

---

[1]) T. J. Stieltjes: Acta Math. Bd. 10, Pg. 300.

Digitized by Google

$$\int \frac{(-x)^{z-1}}{e^x-1}\,dx,$$

wo der Weg um die Punkte 0 und ∞ geht, auf dem Wege nach Unendlich etwas unterhalb des positiven Teils der Axe der reellen Zahlen, darauf um den Punkt ∞ und zurück etwas oberhalb der Axe der reellen Zahlen. $(-x)^{z-1}$ ist auf dem Wege als $e^{(z-1)l(-x)}$ zu verstehen, wo der imaginäre Teil von $l(-x)$ unterhalb der Axe $+\pi i$ und oberhalb der Axe $-\pi i$ ist, denn $l(-x)$ wird als reell genommen, wenn x negativ ist. Wir erhalten mit anderen Worten

$$(-1)^{z-1} = e^{\pm(z-1)\pi i},$$

wo das obere Vorzeichen unterhalb, das untere oberhalb der Axe zu nehmen ist. Nun ist $e^{\pm \pi i} = -1$, so dass die beiden Teile des Integrals die Summe

$$(e^{-\pi z i} - e^{\pi z i})\int_0^\infty \frac{x^{z-1}\,dx}{e^x-1} = -2i \sin \pi z\, \Gamma(z)\zeta(z)$$

haben.

Das Integral, längs kleinen Kreisen um die Punkte 0 und ∞ genommen, fällt fort, denn bei ∞ ist die Funktion unter dem Integralzeichen verschwindend, und bei 0 haben wir, da wir dort für den Nenner x setzen können, $-\int(-x)^{z-2}\,dx$, und dieser Ausdruck ist Null, wenn der reelle Teil von z grösser als 1 ist. Wir haben also unter dieser Voraussetzung

$$(17) \qquad 2 \sin \pi z\, \Gamma(z)\zeta(z) = i\int_0^0 \frac{(-x)^{z-1}}{e^x-1}\,dx$$

mit der angegebenen Bedeutung des Integrals. Dieses stellt indessen für alle Werte von z eine monogene Funktion dar und liefert also die Erweiterung von $\zeta(z)$ auf die ganze Ebene.

Das Integral lässt sich auch auf eine andere Weise ausdrücken, da die geschlossene Kurve, längs der es geführt ist, auch Grenzkurve für den ausserhalb ihr liegenden Teil der Ebene

Digitized by Google

ist; in diesem liegen die singulären Punkte $2p\pi i$ für $p = \pm 1$, ± 2 u. s. w.; nun hat das Integral, in negativer Richtung um den Punkt $2p\pi i$ geführt, den Wert $-2\pi i(-2p\pi i)^{z-1}$, und dieser ergiebt, wenn man ihn zu dem entsprechenden für den Punkt $-2p\pi i$ addiert und mit dem vor dem Integralzeichen stehenden Faktor i multipliciert,

$$(2\pi)^z p^{z-1}[(-i)^{z-1} + i^{z-1}]$$
$$= (2\pi)^z p^{z-1}\left(e^{-(z-1)\frac{\pi}{2}i} + e^{(z-1)\frac{\pi}{2}i}\right) = 2^{z+1}\pi^z p^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}.$$

Wenn wir nun für $p = 1, 2, 3\ldots$ summieren und uns den reellen Teil von $1-z$ grösser als 1 denken, so erhalten wir

$$\sin\pi z\,\Gamma(z)\,\zeta(z) = 2^z\pi^z\sin\tfrac{1}{2}\pi z\,\zeta(1-z),$$

oder, wenn wir $\sin\pi z$ und $\sin\frac{1}{2}\pi z$ durch *Eulers* Formel ((3)) ausdrücken,

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = 2^z\pi^z\Gamma(1-z)\,\zeta(1-z).$$

Nun erhält man jedoch aus (6), wenn man z mit $-z$ vertauscht und mit $-z$ multipliciert,

$$\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = 2^z\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-z);$$

dadurch lässt sich die Formel schreiben:

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \pi^{-\frac{z-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z); \tag{18}$$

hieraus geht hervor, dass der Ausdruck auf der linken Seite unverändert bleibt, wenn z mit $1-z$ vertauscht wird. Wir haben die Formel unter der Voraussetzung abgeleitet, dass der reelle Teil von $-z$ positiv ist; aber da sich die Funktionen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auf die ganze Ebene erweitern lassen, so fällt diese Einschränkung fort.


Digitized by Google

Multiplicieren wir (18) auf beiden Seiten mit $\frac{1}{2}z(1-z)$, so erhalten wir

$$(19) \quad \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)(1-z)\,\zeta(z)=\pi^{\frac{z-1}{2}}\Gamma\left(\frac{3-z}{2}\right)z\,\zeta(1-z).$$

Die Funktion auf der linken Seite mit entgegengesetztem Vorzeichen ist von *Riemann* mit $\xi(t)$ bezeichnet, wenn $z=\frac{1}{2}+it$. Die Gleichung zeigt, dass diese Funktion unverändert bleibt, wenn t mit $-t$ vertauscht wird.

8. Wir wollen nun die Funktion $\zeta(z)$ genauer untersuchen und dazu die Gleichung (17) benutzen, bei der wir Nullpunkte und Pole für die beiden durch das Gleichheitszeichen verbundenen Funktionen vergleichen wollen. $\Gamma(z)$ hat keine Nullpunkte, sondern einfache Pole in den Punkten $0, -1, -2\ldots$; $\sin \pi z$ hat keine Pole, sondern einfache Nullpunkte in $\ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots$; $\sin \pi z\,\Gamma(z)$ ist also ganz transcendent mit den Nullpunkten $1, 2, 3\ldots$ Betrachten wir nun das Integral, so haben wir

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+R,$$

wo R eine Potenzreihe bedeutet, die lauter ungerade Potenzexponenten hat, da $\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}$ das Vorzeichen mit x wechselt[1]). Multiplicieren wir mit $(-x)^{z-1}$, wo z eine ganze Zahl darstellt, und integrieren wir darauf längs der geschlossenen Kurve, die sich, da die Funktion eindeutig ist und ihre Pole auf der Axe der imaginären Zahlen hat, in einen kleinen Kreis um den Nullpunkt zusammenziehen lässt, so sehen wir, dass man $2\pi i$ für $z=1$ erhält, während für $z>1$ alle einzelnen Glieder den Wert Null ergeben. Für z negativ und ungerade giebt es ein Glied von der Form $\frac{a}{x}$, und das Integral ist nicht Null; dasselbe gilt für $z=0$, während man für $z=-2, -4, -6\ldots$

[1]) Durch Zerlegung des Bruches und Entwickelung der einzelnen Brüche in Reihen lässt sich zeigen, dass keins von den Gliedern mit ungeraden Exponenten in R fehlen kann.


Digitized by Google

den Wert Null erhält. Die Funktion $\zeta(z)$ muss deshalb Nullpunkte in diesen Punkten haben, und einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 im Punkte 1, so dass $(z-1)\zeta(z)$ eine ganze transcendente Funktion ist. In der oben betrachteten Funktion

$$f(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)(1-z)\zeta(z) = f(1-z) \tag{20}$$

ist der Pol in $\zeta(z)$ aufgehoben durch den Faktor $1-z$, während die gefundenen Nullpunkte von den Polen in $\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)$ aufgehoben werden. Die Funktion ist also eine ganze transcendente Funktion, deren Nullpunkte dieselben sind wie diejenigen, die $\zeta(z)$ möglicherweise ausser den bereits gefundenen haben kann. In der That existieren solche, und wir können von ihnen beweisen, dass ihr reeller Teil zwischen 0 und 1 liegt; da aus (20) hervorgeht, dass wenn a ein Nullpunkt ist, $1-a$ es auch ist, so müssen die Nullpunkte zu je zweien symmetrisch zum Punkte $\frac{1}{2}$ liegen. Wir brauchen also nur zu beweisen, dass bei keinem Nullpunkte der reelle Teil grösser als 1 sein kann.

Das folgt aus der bekannten *Euler*schen Formel

$$\Pi\left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots, \tag{21}$$

wo für p nach und nach alle Primzahlen eingesetzt werden und dann das Produkt gebildet wird. Sowohl das Produkt wie die Summe sind nur konvergent, wenn der reelle Teil von $z>1$; ausserhalb des dadurch bestimmten Gebietes hat die Gleichung also keine Bedeutung. Wir ersehen hieraus, dass $\zeta(z)$ und deshalb auch $f(z)$ keine Nullpunkte haben können, deren reeller Teil grösser als 1 ist, denn kein solches Punkt kann einen der Faktoren des Produktes zu Null machen.

9. Um die Anzahl der Nullpunkte für $f(z)$ zu bestimmen, legen wir um den Punkt $\frac{1}{2}$ als Mittelpunkt einen Kreis mit einem unendlich grossen Radius a und denken uns, dass der Kreis durch keinen Nullpunkt geht; die Anzahl von solchen wird dann bestimmt durch $\int dlf(z)$, positiv längs dem ganzen

Digitized by Google

Kreise genommen. Nun ist jedoch $f(z) = f(1-z)$, so dass wir uns damit begnügen können das Integral auf dem rechts liegenden Halbkreise zu nehmen, wenn wir hinterher mit 2 multiplicieren. Setzen wir $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, und lassen wir r bis ins Unendliche wachsen, so konvergieren, für einen positiven $\cos\theta$, $\zeta(z)$ und $\zeta'(z)$ beziehungsweise gegen 1 und 0 ((16)), $\zeta'(z):\zeta(z)$ gegen 0. Für den Grenzwert $\cos\theta = 0$ ist das angeführte Verhältnis endlich, da wir vorausgesetzt haben, dass der Kreis durch keinen Nullpunkt geht. Wir finden also nach 82 für die gesuchte Anzahl von Nullpunkten, multipliciert mit $2\pi i$,

$$2\left[dl\pi^{-\frac{z}{2}} + dl\,\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right) + dl(1-z)\right],$$

positiv genommen längs dem rechten Halbkreise. Das erste Glied ergiebt $-2ail\pi$, das letzte $2\pi i$. Für $2dl\,\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)$ können wir nach (11), abgesehen von Gliedern zweiter Ordnung, $l\left(\frac{z}{2}+1\right)dz - \frac{dz}{z+2}$ setzen, wo das letzte Glied durch Integration $-\pi i$ liefert. Für das nachbleibende Glied wollen wir z in $z+\frac{1}{2}$ verändern, da es möglicherweise von Einfluss auf das endliche Glied ist, dass wir den Mittelpunkt des Kreises in den Punkt $\frac{1}{2}$ gelegt haben. Wir erhalten dann, wenn wir den Integrationsweg in die gerade Linie von $-ai$ nach $+ai$ zusammenziehen

$$2\left[\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right)\left(l\left(\frac{5}{4}+\frac{z}{2}\right)-1\right]_{-ai}^{+ai} = ail\left(\frac{a^2}{4}+\frac{25}{16}\right) - 2ai + \frac{5}{2}l\frac{5+2ai}{5-2ai}.$$

Da das letzte Glied $\frac{5}{2}\pi i$ ist, so haben wir, wenn wir das Glied $\frac{25}{16}$, dass nur Einfluss auf die unendlich kleinen Glieder hat, vernachlässigen, und wenn n die gesuchte Anzahl von Nullpunkten bedeutet,

$$2\pi in = -2ail\pi + 2\pi i - 2ai + \frac{5}{2}\pi i + 2ail\frac{a}{2},$$

oder

$$n = \frac{a}{\pi}\left(l\frac{a}{2\pi} - 1\right) + \frac{9}{4}. \tag{22}$$

Digitized by Google

Diese Punkte liegen zu je zweien symmetrisch mit Bezug auf die Axe der reellen Zahlen, denn die Funktion ist reell für positive $z > 1$ (87). Die Formel stimmt überein mit derjenigen, die *Riemann* ohne Beweis gegeben hat, jedoch fehlt in der *Riemann*schen Formel das Glied $\frac{9}{4}$; der Beweis ist hier angeführt, weil Grund zu der Annahme vorhanden ist, dass *Riemann* auf einem ähnlichen Wege zu seinem Resultat gelangt ist, aber unsere Entwickelung ist in Wirklichkeit nicht unanfechtbar; wenn nämlich die Nullpunkte mit wachsendem a dichter und dichter fallen, so muss der Kreis solchen Punkten unendlich nahe kommen, und wir können dann nicht ohne Untersuchung das $\cos\theta = 0$ entsprechende Element des Integrals fortwerfen. Um das Verhältnis von einem anderen Gesichtspunkt aus zu betrachten machen wir darauf aufmerksam, dass das Integral die Zunahme bestimmt, welche das Argument der Funktion (multipliciert mit i) erfährt, wenn z den Halbkreis durchläuft. Ist nun $z = \alpha + \beta i (\alpha > 1)$, so zeigt (16), dass wir $\zeta(z) = 1 + k$ setzen können, wo $|k| < s_\alpha - 1$; da man $s_2 = 1,6\ldots$ hat, so ist $|k|$ ein echter Bruch, so lange der reelle Teil von z grösser ist als eine gewisse Zahl l, die zwischen 1 und 2 liegt. So lange man $|k| < 1$ hat, kann jedoch $1 + k$ keine Kurve beschreiben, die um den Nullpunkt herum geht, und das Argument der Funktion kann deshalb keine Zunahme erfahren, die 2π erreicht. Der Mangel des Beweises liegt also darin, dass wir nicht die Veränderung des Arguments kennen, welche von dem Teile der Kreisperipherie herrührt, deren Projektion zwischen $\frac{1}{2}$ und l fällt. Die Richtigkeit der Formel ist von *v. Mangoldt* bewiesen[1]; dieser stützt sich auf einen Satz von *Hadamard*, den wir gleich erwähnen wollen.

10. Erteilen wir a die Zunahme 1, so erhalten wir oberhalb der Axe der reellen Zahlen eine Zunahme der Anzahl der Wurzeln, die abgesehen von verschwindenden Gliedern dargestellt wird durch $\frac{1}{2\pi} l \frac{a}{2\pi}$, eine Grösse die mit a bis ins Unendliche wächst.

[1] Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften 1894.

Digitized by Google

Verstehen wir unter $\alpha \pm \beta i$ zwei konjugierte Nullpunkte, so sehen wir nun leicht, dass die Reihe

$$\sum\left(\frac{1}{z-\alpha-\beta i}+\frac{1}{z-\alpha+\beta i}\right)=\sum\frac{2(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2+\beta^2}$$

unbedingt konvergent ist. Nehmen wir nämlich diejenigen Glieder, für welche β zwischen n und $n+1$ liegt, wo n eine sehr grosse Zahl bedeutet, so ist die Anzahl der Glieder kleiner als $l\beta$, die Summe ihrer Moduln also kleiner als

$$\frac{2|z-\alpha|\, l\,(n+1)}{(z-\alpha)^2+n^2};$$

die Reihe aber, in der dieses Glied das allgemeine ist, ist konvergent für alle endlichen z.

Riemann nimmt an, dass man für alle Nullpunkte $\alpha=\frac{1}{2}$ hat, oder mit anderen Worten, dass die Gleichung $\xi(t)=0$ lauter reelle Wurzeln hat, ein Satz der indessen nicht bewiesen ist. *Hadamard* hat bewiesen[1]), dass $\xi(t)$, als Funktion von t^2 genommen, vom Geschlechte Null ist. *Hadamards* Satz sagt also, dass man

$$\xi(t)=A\left(1-\frac{t^2}{t_1^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{t_2^2}\right)\cdots \tag{23}$$

hat, wo $A=\xi(0)$ eine Konstante bedeutet. Auf diesen Satz stützt *v. Mangoldt* seinen Beweis, während wir oben den entgegengesetzten Weg gegangen sind ohne jedoch darauf einzugehen zu zeigen, dass das Polynom G auf eine Konstante reduciert wird.

11. Wir erhalten einen neuen allgemein gültigen Ausdruck für $\zeta(z)$ durch Anwendung der Summationsformel auf S. 164; diese liefert

$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{(1+yi)^{-z}-(1-yi)^{-z}}{e^{2\pi y}-1}\,dy. \tag{24}$$

[1]) Liouvilles Journal 1893.

Digitized by Google

Wir können die Summation auch weiterhin in der Reihe beginnen und erhalten dann

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^z} + \frac{1}{2 \cdot n^z} + \frac{n^{1-z}}{z-1}$$

$$(25) \qquad - \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{(n+iy)^{-z} - (n-iy)^{-z}}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

Hier nimmt das Restintegral nach Null zu ab, wenn n bis ins Unendliche wächst und der reelle Teil von z positiv ist; man hat deshalb in diesem Falle

$$(26) \qquad \zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot n^z} + \frac{n^{1-z}}{z-1} \cdot (n = \infty).$$

Nun fanden wir früher (59), dass die Summe der Reihe für $z = 1 + \varrho i$ unbestimmt war, aber auf einen bestimmten Kreis mit dem Radius $\frac{1}{\varrho}$ fiel. Der unbestimmte Teil wird aber eben durch das letzte Glied in (26) aufgehoben, und der Mittelpunkt des Kreises bestimmt also den wirklichen Wert der Funktion.

Wenn z eine negative ganze Zahl ist, so können wir leicht den Wert der Funktion mit Hülfe von (24) finden, wenn wir im Zähler des Restintegrals die Binomialformel anwenden und den Ausdruck für die *Bernouilli*schen Zahlen auf S. 165 benutzen. Auf diese Weise findet man

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2};\ \zeta(-1) = -\tfrac{1}{12};\ \zeta(-2) = 0;$$
$$\zeta(-3) = \tfrac{1}{120};\ \zeta(-5) = -\tfrac{1}{252};\ \ldots \zeta(-2n) = 0;$$
$$\zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{1}{2n} B_{2n-1}.$$

Für andere Werte von z können wir auf ähnliche Weise (25) benutzen, aber wir müssen hier bei der Benutzung der Binomialformel n bis ins Unendliche wachsen lassen, da y bis ins Unendliche wächst; wir erhalten also für das Restintegral

$$(27) \qquad 2n^{-z}\left(\frac{1}{4} B_1 \frac{z}{n} - \frac{1}{8} B_3 \frac{z(z+1)(z+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 n^3} + \ldots\right),$$

16*

Digitized by Google

wo wir die Reihe nach einem beliebigen Gliede abbrechen können; die Formel gilt dann aber nur für einen gewissen Teil der Ebene. Ist beispielsweise $R \cdot z > -5$, so fallen die Glieder nach den beiden angeführten (in 27) fort; werden dann die beiden Glieder auf der rechten Seite von (26) hinzugefügt, so erhalten wir eine Formel, die gilt, wenn der reelle Teil von z grösser ist als -5.

12. Man kann für $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ eine Reihe bilden, die nach Potenzen von z fortschreitet und in der ganzen Ebene gilt, wenn man den Zähler in (24) nach Potenzen von z entwickelt; dadurch erhält man als Koefficient von z^n

$$A_n = (-1)^n \frac{i}{n!} \int_0^\infty \frac{l^n(1+iy) - l^n(1-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy. \tag{28}$$

Man findet hier (*Gram*)

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} l 2\pi = 0{,}081061466795\ldots \\ A_2 &= \qquad\qquad -0{,}003178227954\ldots \\ A_3 &= \qquad\qquad -0{,}000785194477\ldots \end{aligned}$$

Jensen und *Stieltjes* haben der Reihe eine etwas andere Form gegeben; die folgenden Koefficienten verdanke ich jedoch einer Mitteilung von *Gram*, der die Berechnung am weitesten fortgeführt hat; er hat gefunden:

$$\zeta(1-z) = -\frac{1}{z} + 0{,}57721566490153289\ldots (C)$$

$-z$	0,07281584548367 67...	$-z^2$	0,00484518159643 61...
$+z^3$	0,00034230573671 72...	$+z^4$	0,00009689041939 44...
$+z^5$	0,00000661103181 08...	$-z^6$	0,00000033162409 08...
$-z^7$	0,00000010462094 59...	$-z^8$	0,00000000873321 80...
$-z^9$	0,00000000009478 26...	$+z^{10}$	0,00000000005658 41...
$+z^{11}$	0,00000000000676 86...	$+z^{12}$	0,00000000000034 92...
$-z^{13}$	0,00000000000000 44...	$-z^{14}$	0,00000000000000 24...
$-z^{15}$	0,00000000000000 02...		

Digitized by Google

ANWENDUNG AUF DIE THEORIE DER PRIMZAHLEN.

13. Aus der *Euler*schen Formel (21) erhalten wir, wenn wir logarithmieren und die einzelnen Glieder in Reihen entwickeln,

$$(29) \qquad \Sigma p^{-z} + \tfrac{1}{2}\Sigma p^{-2z} + \tfrac{1}{3}\Sigma p^{-3z} + \ldots = l\zeta(z),$$

gültig, wenn der reelle Teil von z grösser ist als 1. Setzen wir $\zeta(z) = 1 + \alpha$, also

$$(30) \quad \alpha = 2^{-z} + 3^{-z} + 4^{-z} + \ldots \; l\zeta(z) = \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \ldots$$

so sehen wir den identischen Charakter der Formel. Die Glieder in Σp^{-z} kommen nämlich jedes einmal in α vor, aber nicht in den folgenden Gliedern; die Glieder in Σp^{-2z} finden sich jedes einmal in α, und mit $-\frac{1}{2}$ multipliciert in $-\frac{1}{2}\alpha^2$, aber nicht in den folgenden Gliedern, und so fort; man zeigt nämlich leicht, dass man für dieselbe Funktion nicht zwei verschiedene Reihenentwickelungen von der angegebenen Form haben kann. Wir erhalten deshalb auch eine Identität, wenn wir auf beiden Seiten von (29) nur alle Glieder kn^{-z} mitnehmen, bei denen n kleiner ist als eine beliebig gegebene, positive, nicht ganze Zahl x. Dasselbe gilt für eine Füile von anderen Formeln, die sich aus (29) dadurch ableiten lassen, dass man differentiiert, integriert, für z den Wert $z+1$ einsetzt u. s. w. Im besonderen wollen wir für z eine Konstante in die Formeln einsetzen; ist diese a, so können wir zuerst $z+a$ für z einsetzen, und darauf $z=0$. Wir wollen deshalb immer voraussetzen, dass der Wert, den wir einsetzen sollen, $z=0$ ist.

Auf diese Weise können wir auf der linken Seite des Gleichheitszeichens eine Menge Summen von Funktionen derjenigen Primzahlen erhalten, die kleiner sind als x. So erhalten wir in (29) für $z=0$ die Anzahl der unter x vorkommenden Primzahlen plus der halben Anzahl der Primzahlquadrate + u. s. w. Für $z=1$ erhalten wir die Summe der reciproken Werte der Primzahlen + u. s. w. Differentiieren wir und setzen darauf $z=0$, so erhalten wir mit entgegengesetztem Vorzeichen die Summe der Logarithmen der Primzahlen, plus der halben Summe

Digitized by Google

der Logarithmen der Primzahlquadrate u. s. w.; mit anderen Worten, wir erhalten den Logarithmus eines Produktes, das aus allen Primzahlen kleiner als x gebildet ist, jedoch so, dass die Primzahlen kleiner als $\sqrt{x}$ jede zweimahl vorkommen, die Primzahlen kleiner als $\sqrt[3]{x}$ jede dreimal u. s. w. Dieses Produkt ist eben das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für alle Zahlen kleiner als x.

Nun multiplicieren wir (29) oder eine daraus gebildete Gleichung mit x^z. Dabei behält die Reihe ihre Form, aber wo wir früher $n < x$ hatten, erhalten wir nun für n einen unechten Bruch, während die analogen Zahlen für den ganzen übrigen Teil der Reihe echte Brüche werden. Um die Lösung der Aufgabe zu erhalten, müssen wir dann den letzten Teil der Reihe fortwerfen und in dem zurückbleibenden Teil $z = 0$ setzen. Wir können versuchen diese Operation an der Funktion auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens dadurch auszuführen, dass wir sie nach Potenzen von α entwickeln; dies führt zu verschiedenen interessanten Resultaten, die jedoch am natürlichsten in der Zahlentheori behandelt werden; hier wollen wir nur direkt die Funktion $\zeta(z)$ benutzen, und wir wollen deshalb versuchen die oben beschriebene Operation auf solche Weise auszuführen, dass sie sich auf eine Funktion anwenden lässt, ohne dass man nötig hat diese in einer Reihe von exponentiellen Gliedern zu entwickeln. Um das zu erreichen, wollen wir einen Hülfssatz beweisen.

14. Unter einer *A-Funktion* will ich eine *ganze transcendente* Funktion von $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ verstehen, die für alle Punkte auf der einen Seite einer gewissen Geraden und auf dieser Linie selbst endlich ist, oder derartig unendlich für unendliche r, dass ihr Modulus von niedrigerer Ordnung ist als r^p, wo p eine endliche positive Zahl bedeutet.

Als Beispiele lassen sich anführen: $e^{kz}(k>0)$; diese Funktion ist endlich links von einer Geraden, die der Axe der imaginären Zahlen in endlichem Abstande von dieser parallel ist, im übrigen aber so weit nach rechts wie man will; ferner die Funktion ze^{kz}, die links von der genannten Geraden bis ins Unendliche wächst wie r.

Digitized by Google

Unter einer zur A-Funktion gehörenden *B-Funktion* verstehe ich eine *eindeutige* Funktion, die auf der anderen Seite der genannten Geraden endlich ist für $r=\infty$.

Als Beispiele seien e^{-kz} und $\frac{1}{z-a}$ genannt.

Die beiden Teile der Ebene, in der wir die beiden Funktionen betrachten, brauchen nicht notwendig so zu sein, wie wir sie hier genommen haben; das, worauf es ankommt, ist nur, dass sie zusammen die ganze Ebene erfüllen.

Der Satz lautet dann folgendermassen:

Lässt eine Funktion sich in eine A-Funktion und in eine dazu gehörige B-Funktion zerlegen, so kann die Zerlegung, abgesehen von einem konstanten Gliede, nur auf eine Weise geschehen.

Wir wollen nämlich annehmen, die zerlegte Funktion sei $A+B$, und sie liesse sich auch in $A+C$ und $B-C$ zerlegen. Dann muss C sowohl eine A-Funktion wie eine B-Funktion sein; sie ist also eine ganze transcendente Funktion, die in der ganzen Ebene für wachsende r von niedrigerer Ordnung ist als r^p. C lässt sich dann in einer, in der ganzen Ebene geltenden Potenzreihe $\Sigma a_q z^q$ entwickeln, wo wir nach *Cauchys* Satz haben:

$$a_q = \frac{1}{2\pi i}\int C z^{-q-1}\,dz = \frac{1}{2\pi r^q}\int C e^{-q\theta i}\,d\theta;$$

hier ist das Integral auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt in 0 und dem Radius r zu nehmen. Da der zweite Faktor unter dem Integralzeichen den Modulus 1 hat, und $|C|$ für $r=\infty$ von niedrigerer Ordnung ist als der p^{te}, so erhält man $a_q=0$ für $q\geqq p$. C muss also ein Polynomium sein, dessen Grad niedriger ist als p. Nun soll C indessen als B-Funktion für $r=\infty$ auf der einen Seite der Grenzlinie endlich bleiben; das bringt mit sich, dass C eine Konstante sein muss. *q. e. d.* Kennen wir den Wert der A-Funktion für einen gewissen Wert von z, so ist $C=0$.

15. Wir sehen nun leicht, dass die Zerlegung, welche die erwähnten zahlentheoretischen Probleme verlangen, eben eine Zerlegung in eine A-Funktion und in eine B-Funktion ist.


Digitized by Google

Nach Multiplikation mit x^z hat der unendliche Teil der Reihe die Form, die wir in Beispiel 3 auf S. 141 betrachteten; er ist deshalb endlich auf der rechten Seite einer gewissen Geraden, die der Axe der imaginären Zahlen parallel läuft; nehmen wir die Grenzlinie etwas rechts von dieser, so wird die Funktion eine B-Funktion, die zu der A-Funktion gehört, welche vom ersten Teil der Reihe gebildet wird. Es ist klar, dass, wenn wir von der A-Funktion eine A-Funktion mit derselben Grenzlinie subtrahieren, eine A-Funktion mit derselben Grenzlinie zurückbleibt.

Wir können nun den Zerlegungsprozess auf solche Weise ausdrücken, dass er unabhängig von der Form der Funktion ist, haben also die allgemeine Lösung der erwähnten zahlentheoretischen Probleme auf folgende Form reduciert:

Man soll die Funktion $l\zeta(z)$ oder eine der analogen, nach Multiplikation mit x^z, in eine A-Funktion und eine B-Funktion teilen. Die Lösung des Problemes ist dann der Wert der A-Funktion für $z=0$.

Die Funktion $l\zeta(z)$ ist mehrdeutig, aber ihre Abgeleitete ist eindeutig. Wir operiren daher mit $l\zeta(z)$ in der Weise, dass wir unsere Operation auf die Abgeleitete anwenden und nachher durch Integration auf zweckmässigem Wege zu der eindeutigen Bestimmung von $l\zeta(z)$, die wir in (29) haben, übergehen.

Wenn x eine Primzahlpotenz ist, dann wird die Theilung unbestimmt; wir haben daher vorausgesetzt, dass x keine ganze Zahl bedeutet. In diesem Falle wird die Theilung im Allgemeinen dadurch bestimmt, dass man den Wert der B-Funktion für $z=+\infty$ kennt.

Wir wollen nun unsere Operation auf einige Ausdrücke anwenden, die im Folgenden benutzt werden; die Grenzlinie ist immer die früher erwähnte Gerade, die der Axe der imaginären Zahlen parallel läuft.

ax^z ist eine A-Funktion, die a wird für $z=0$. *Ein konstantes Glied bleibt also unverändert* bei der Operation; dasselbe gilt von einem *konstanten Faktor.*

$z^p x^z$ ist eine A-Funktion, die verschwindet für $z=0$.

Digitized by Google

Ein Glied von der Form $\frac{1}{z-a}$ liefert

$$\frac{x^z}{z-a}=\frac{x^z-x^a}{z-a}+\frac{x^a}{z-a},$$

wodurch die Zerlegung ausgeführt ist. Das Resultat wird also

(30) $$\frac{x^a-1}{a}.$$

Ein Glied von der Form $\frac{1}{(z-a)^2}$ liefert

$$\frac{x^z}{(z-a)^2}=\frac{x^z-x^a-(z-a)x^a lx}{(z-a)^2}+B;$$

daraus ergiebt sich

(31) $$\frac{1+x^a(alx-1)}{a^2}.$$

Für ein Glied von der Form $l\left(1-\frac{z}{a}\right)$ setzen wir

$$l\left(1-\frac{z}{a}\right)=\int_a^{-\infty}\left(\frac{1}{z-y}+\frac{1}{y}\right)dy,$$

wo der imaginaire Teil bei der Integration konstant gehalten wird; dadurch wird der Logarithmus so bestimmt, dass er für positive Zahlen reell ist.

Zufolge der oben gemachten Bemerkung sollen wir die Operation unter dem Integralzeichen anwenden und erhalten dadurch das Resultat

(32) $$\int_a^{-\infty}\frac{x^y}{y}\,dy.$$

Ist a positiv, so treffen wir auf dem Integrationswege den Pol 0 mit dem Residuum 1, und deshalb erhalten wir ein Glied $\pm\pi i$, je nachdem wir um den Punkt nach der einer oder anderen Seite biegen.

Digitized by Google

Beisp. 1. Wir wollen die Funktion $-\zeta'(z):\zeta(z)$ betrachten, die, wie wir gesehen haben, zur Bestimmung von $l M_x$ dient, wo M_x das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für die Zahlen kleiner als x bedeutet. Nun haben wir nach (20) und (8)

$$(33)\quad (1-z)\zeta(z)=\zeta(0)e^{C\frac{z}{2}}\pi^{\frac{z}{2}}\Pi\left(1+\frac{z}{2n}\right)e^{-\frac{z}{2n}}\Pi\left(1-\frac{z}{a}\right),$$

wo n die Werte 1, 2, 3 ... hat und a einen von den unbekannten Nullpunkten bedeutet, die nach ihren Moduln geordnet sind. Hieraus folgt

$$(34)\quad -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\frac{1}{z-1}-\sum\left(\frac{1}{z+2n}-\frac{1}{2n}\right)-\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}l\pi-\sum\frac{1}{z-a}.$$

Hier liefert das erste Glied bei der Operation $x-1$, während sich aus dem zweiten

$$\tfrac{1}{2}\sum\frac{x^{-2n}}{n}=-\tfrac{1}{2}l(1-x^{-2})$$

ergiebt. Das letzte Glied liefert

$$\sum\frac{1-x^{a}}{a};$$

wir haben aber

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}=-1-\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}l\pi+\sum\frac{1}{a},$$

wo nach 12 die Grösse auf der linken Seite $-l(2\pi)$ ist.

Wir erhalten also, wenn wir im letzten Gliede die konjugierten Nullpunkte vereinigen und mit *Riemann* $a=\frac{1}{2}+i\beta$ annehmen,

$$(35)\quad l M_x=x-l(2\pi)-\tfrac{1}{2}l(1-x^{-2})-x^{\frac{1}{2}}\sum\frac{\cos\beta l x+2\beta\sin\beta l x}{\beta^2+\frac{1}{4}}.$$

Beisp. 2. Setzen wir $z+1$ statt z, so erhalten wir durch unsere Operation die Funktion

$$N_x=\Sigma l p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots\right)$$

Digitized by Google

bestimmt, wo die Nenner x nicht übersteigen dürfen; wir haben dann

$$-\frac{\zeta'(z+1)}{\zeta(z+1)} = \frac{1}{z} - \sum\left(\frac{1}{z+2n+1} - \frac{1}{2n+1}\right) + 1 - l2$$
$$-\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}l\pi - \frac{1}{z+1-a}.$$

Das erste Glied liefert lx, das zweite

$$\frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{5}x^{-5} + \ldots = \frac{1}{2}l\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x};$$

das letzte liefert

$$\sum\frac{1}{a-1} - \sum\frac{x^{a-1}}{a-1}.$$

Hiedurch findet man, dass das konstante Glied

$$-\left[\frac{\zeta'(z+1)}{\zeta(z+1)} + \frac{1}{z}\right]_{z=0} = -C$$

wird mithin

$$(36)\qquad N_x = lx + \tfrac{1}{2}l\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} - C - x^{-\frac{1}{2}}\sum\frac{-\cos\beta lx + 2\beta\sin\beta lx}{\beta^2 + \frac{1}{4}}.$$

Beisp. 3. Setzen wir $z + \frac{1}{2}$ statt z, so bestimmen wir die Funktion

$$O_x = \Sigma lp\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p^2}} + \frac{1}{\sqrt{p^3}} + \ldots\right),$$

wo die Zahlen unter den Wurzelzeichen x nicht erreichen dürfen. Wir finden hier

$$(37)\qquad O_x = 2\sqrt{x} + \tfrac{1}{4}l\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\zeta'(\frac{1}{2})}{\zeta(\frac{1}{2})} - 2\sum\frac{\sin\beta lx}{\beta},$$

wo die Konstante etwa $-2,7$ ist.

Hier haben wir in der Restsumme das Glied isoliert erhalten, das bei allen diesen Aufgaben die Bestimmung der Grenzen für das unstetige Glied schwierig macht; könnte man nachweisen, dass es innerhalb endlicher Grenzen oscilliert, so

Digitized by Google

würde dadurch für alle Aufgaben die Ordnung des Fehlers bestimmt sein, den man für bis ins Unendliche wachsende x begeht, wenn man nur den stetigen Teil des Resultates benutzt.

Wir können indessen beweisen, dass dieser eine Art von Mittelwert darstellt, denn setzen wir e^y statt x, so erhalten wir den Mittelwert der Restsumme, wenn y von a nach b geht,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \sum \frac{\sin\beta y\, dy}{\beta} = \frac{1}{b-a}\sum \frac{\cos\beta a - \cos\beta b}{\beta^2}.$$

Hier ist der Modulus des Zählers höchstens 2, so dass der Modulus des gesuchten Mittelwertes höchstens

$$\frac{2}{b-a}\sum \beta^{-2}$$

ist.

Die hieraus erhaltene Summe lässt sich jedoch leicht bestimmen, wenn man (34) differentiiert und darauf $z=\frac{1}{2}$ setzt; dadurch findet man für die Summe 0,023105..., so dass der gesuchte Mittelwert nahe bei Null liegt, wenn $b-a$ nicht zu klein ist. Da der kleinste Wert von β nach *v. Mangoldt* grösser als 12 ist[1]) (*Gram* hat den Wert 14,135... gefunden), so nimmt $\Sigma\beta^{-2n}$ stark ab, wenn n wächst.

Beisp. 4. *Riemann* bezeichnet mit $f(x)$ die Anzahl von Primzahlen, plus halbe Anzahl der Primzahlquadrate, plus u. s. w., die sich unter den Zahlen kleiner als x finden. Die Funktion, mit der wir operieren müssen, um diese Anzahl zu bestimmen, ist $l\zeta(z)$. Wenn wir (33) benutzen, so können wir die exponentiellen Faktoren fortlassen, da diese Glieder von der Form kz liefern und solche Glieder bei unserer Operation fortfallen. Nach 11 erhalten wir $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$.

Das wichtigste Glied wird $-l(1-z)$, aus dem sich nach (32) ergiebt

---

[1]) Der hier gefundene Wert liefert uns $2\beta^{-2} < 0{,}023105\ldots$, und dadurch $\beta > 9{,}3$; wenn man $\Sigma\beta^{-4}$ berechnet, bekommt man als untere Grenze 12,8.

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x^y}{y}\, dy = \int_{0}^{x} \frac{dx}{lx} = Li(x).$$

Wir haben gesehen, dass unter diesen Gliedern, da $\alpha = 1$ positiv ist, ein Glied $l(-1)$ vorkommt; das wird indessen durch dass entsprechende Glied von $\log(-\frac{1}{2})$ aufgehoben; wir setzen deshalb das konstante Glied gleich $-l2$ und verstehen dann unter dem Integrallogarithmus

$$Li(x) = C + llx + \frac{lx}{1} + \frac{l^2x}{2 \cdot 2!} + \frac{l^3x}{3 \cdot 3!} + \ldots$$

Aus einem Gliede $l\left(1 + \frac{z}{2n}\right)$ erhalten wir

$$\int_{-2n}^{\infty} \frac{x^y}{y}\, dy = \int_{-2n}^{-\infty} dy \int_{\infty}^{x} x^{y-1}\, dx = \int_{x}^{\infty} \frac{x^{-2n-1}}{lx}\, dx.$$

Hier ist kein imaginäres Glied hinzuzufügen, da die Nullpunkte negativ sind. Summieren wir für $n = 1, 2, 3 \ldots$, so erhalten wir

$$\int_{x}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \frac{dx}{x\,lx},$$

ein Glied, das sehr stark mit wachsendem x abnimmt, und das für $x = 2$ etwa $\frac{1}{7}$ beträgt. Im ganzen können wir uns merken, dass die Bedeutung eines Nullpunkts ausserordentlich stark abnimmt, je nachdem derselbe nach links rückt. Setzen wir beispielsweise $z + 12$ statt z, so wird die Funktion, die wir bestimmen, die Summe der reciproken Werte der zwölften Potenzen der Primzahlen plus u. s. w. Hier rücken der Pol 1 und alle Nullpunkte 12 nach links, und die reellen Punkte erhalten für grosse x eine ganz verschwindende Bedeutung. Das konstante Glied dagegen wird $l\zeta(12)$, und dies ist eben die gesuchte Summe für $x = \infty$. Da nun die Zahlen, die grösser sind als x, für grosse x verschwindend wenig zur Summe bei-

Digitized by Google

tragen, so müssen auch die imaginären Nullpunkte ohne erkennbare Bedeutung sein.

Wenn wir die gefundenen Resultate vereinigen, so erhalten wir

$$(38)\quad f(x) = Li(x) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\,l\,x} - l\,2 + 2x^{\frac{1}{2}} \sum \int_{\frac{1}{2}}^{-\infty} \frac{y\cos\beta l x + \beta \sin\beta l x}{\beta^2 + y^2}\,dy$$

wo das letzte Glied dadurch gebildet ist, dass wir $y+\beta i$ für y eingesetzt und die Glieder vereinigt haben, die zu konjugierten Nullpunkten gehören. Auch hier verursacht nur das letzte Glied im Zähler des Bruches besondere Schwierigkeiten. So weit man die Primzahlen aufgezählt hat (bis 1000 Millionen), stimmt die gesuchte Zahl überraschend gut mit $Li(x)$ überein.

Die Formel (38) ist dieselbe, die von *Riemann* gegeben ist, wenn ein Fehler in ihrem konstanten Glied verbessert wird[1]).

16. *Riemann* hat die Formel (38) abgeleitet, indem er zuerst $f(x)$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt hat; hierzu kann man auf folgende (von der *Riemann*schen verschiedene) Weise gelangen.

Man braucht nur zu zeigen, dass (a positiv genommen)

$$(39)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z\,dz}{z} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2}, \\ 0 \end{cases} \text{je nachdem } x \gtreqless 1;$$

dadurch erhält man nämlich

$$(40)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a\ i\infty} \frac{x^z\, l\zeta(z)\,dz}{z},$$

denn bei der Integration fallen alle Glieder, die zu unserer B-

[1]) *Hadamard* (C R. 1896 Pg. 1470 und Bull. de la sociètè mat. de France T. 24. 1896) und *de la Vallée-Poussin* (Annales de la sociète scient. de Bruxelles T. XX 2 partie 1896) haben unabhängig von einander bewiesen dass $\zeta(z)$ keinen Nullpnnkt von der Form $1+\beta i$ haben kann. Sich auf diesen Satz stützend hat *v. Mangoldt* (Journal für reine und angewandte Math. Bd. 119 Pg. 65) bewiesen, dass das Restintegral in (38), mit x dividiert, nach Null zu konvergiert.


Digitized by Google

Funktion gehören, fort, während die übrigen dasselbe geben, was wir erhalten, wenn wir in der A-Funktion $z=0$ setzen.

Um die Formel (39) zu beweisen, integrieren wir längs den Seiten eines Rechtecks mit den Eckpunkten $a-i\infty$, $a+i\infty$ $-b+i\infty$, $-b-i\infty$, wo b positiv ist.

Im Rechteck finden sich keine anderen Pole als 0; dieser hat das Residuum 1, und das Integral mit dem vorangehenden Faktor hat deshalb den Wert 1. Wir können b bis ins Unendliche wachsen lassen, da wir dadurch keinen Pol in das Rechteck aufnehmen. Nun ist die Funktion jedoch für $x>1$ Null auf den drei unendlich fernen Seiten, und der Wert des Integrals rührt deshalb nur von der Seite rechts her. Ist dagegen $x<1$, so bestimmt die Seite links den Wert des Integrals, während es, auf der Seite rechts genommen, Null ist. Man sieht leicht, dass für $x=1$ der Wert $\frac{1}{2}$ wird, wenn man voraussetzt, dass man dasselbe ∞ in beiden Grenzen hat.

Wir haben unsere neue Entwickelung der *Riemann*schen Formel für $f(x)$ gegeben, weil es uns von Interesse scheint, die schwierige Aufgabe von mehreren Seiten zu betrachten. Durch unsere Betrachtungen werden verschiedene Punkte klarer, während an anderen dieselben Mängel wie bei *Riemann* vorliegen. So ist es nicht bewiesen, dass wir unsere Operation auf eine unendliche Reihe Glied für Glied anwenden dürfen. Man musste z. B. beweisen, dass (Beisp. 1)

$$\sum \frac{x^a}{z-a}$$

für $z=+\infty$ Null ist, wenn x keine Primzahlpotenz ist.

KAPITEL II.

DOPPELPERIODISCHE EINDEUTIGE FUNKTIONEN.

NULLPUNKTE UND POLE.

17. Wir sind bei früheren Untersuchungen auf eindeutige, doppelperiodische Funktionen gestossen; nunmehr wollen wir



untersuchen, welche Eigenschaften eine Funktion haben muss, wenn nur von ihr gegeben ist, dass sie eindeutig, doppelperiodisch und in der ganzen Ebene ohne wesentlich singuläre Punkte ist.

Die Periodicität bestimmt eine Einteilung der ganzen Ebene in ein zusammenhängendes Netz von kongruenten Parallelogrammen, und in den homologen Punkten von diesen nimmt die Funktion dieselben Werte an. Hieraus folgt nun sofort, dass *die Funktion in jedem Parallelogramme einen oder mehrere Pole haben muss,* denn im entgegesetzten Fall wäre sie ganz transcendent und könnte auf der ganzen Kugel nicht unendlich werden; das würde aber mit sich bringen, dass sie konstant wäre.

Wenn z den Umfang eines Periodenparallelogrammes durchläuft, so durchläuft die doppelperiodische Funktion auf den gegenüberliegenden Seiten dieselben Werte, nur in entgegengesetzter Reihenfolge. Hieraus folgt, dass das Integral einer solchen Funktion, längs dem Umfange genommen Null sein muss; darauss geht hervor, dass *die Summe der Residuen in einem Periodenparallelogramm Null ist.* Die kleinste mögliche Anzahl von Polen in einem solchen Parallelogramm beträgt also zwei; diese können jedoch zusammenfallen. Ist die Anzahl der Pole n (wobei einer von der Ordnung k als k zählt), und lassen sich keine Periodenparallelogramme von kleinerer Fläche bilden als die gegebenen, so sagt man von der Funktion, sie sei von der Ordnung n. *Es existiert also keine doppelperiodische Funktion erster Ordnung.*

18. Ist $\varphi(z)$ doppelperiodisch, so gilt dasselbe von $\varphi'(z):\varphi(z)$; benutzen wir diese Funktion bei der Integration, so wird das Integral also auch Null. Dieses Integral bestimmt indessen die Zahl, die wir S. 173 mit n bezeichneten. Hieraus folgt also, dass *eine doppelperiodische Funktion in einem Periodenparallelogramm gleich oft 0 und ∞ wird.* Da $\varphi(z)-a$ auch doppelperiodisch ist und unendlich wird wie $\varphi(z)$, so können wir auch sagen, dass die Funktion im Parallelogramm jeden Wert gleich oft annimmt.

Die Funktion $z\varphi'(z):\varphi(z)$ nimmt in den entsprechenden Punkten von zwei gegenüberliegenden Seiten nicht dieselben

Digitized by Google

Werte an, da der Faktor z Werte erhält, deren Unterschied eine Periode a ist. Benutzen wir die Funktion bei der Integration, so können wir also, statt längs den beiden gegenüberliegenden Seiten zu integrieren, längs der einen von den Seiten $a\varphi'(z):\varphi(z)$ integrieren; das unbestimmte Integral wird dadurch $al\varphi(z)$, und da $\varphi(z)$ denselben Wert in den beiden Endpunkten der Seite hat, so wird der Wert des Integrals, dividiert durch $2\pi i$, gleich dem Produkt aus a und einer ganzen Zahl; da dieselbe Betrachtung für das andere Seitenpaar gilt, so erhalten wir

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = \text{Summe von Perioden.}$$

Die Bedeutung dieses Integrals erkennt man leicht; es bestimmt wie bekannt die Summe der Residuen für die Funktion under dem Integralzeichen; wird der Faktor z aus dem Zähler fortgenommen, so ist das Residuum $+1$ für jeden Nullpunkt und -1 für jeden Pol; kommt der Faktor z hinzu, so erhalten wir Glieder von der Form

$$\pm\frac{z}{z-a} = \pm\left(1+\frac{a}{z-a}\right);$$

da nun, wie oben gezeigt $\Sigma \pm 1 = 0$, so haben wir den Satz:

In jedem Periodenparallelogramm ist, abgesehen von Perioden die Summe der Nullpunkte gleich der Summe der Pole.

Dieser Satz rührt von *Liouville* her, der ihn jedoch auf eine andere Art bewiesen hat.

Da $\varphi(z)-a$, wo a eine willkürliche Konstante bedeutet, doppelperiodisch ist mit denselben Polen wie $\varphi(z)$, und Null wird, wenn $\varphi(z)=a$, so lässt der Satz sich zu dem folgenden erweitern: *Die Summe aller derjenigen Punkte, in denen die Funktion den Wert a annimmt, ist dieselbe für alle Werte von a, abgesehen von ganzen Perioden.*

19. Haben zwei doppelperiodische Funktionen dieselben Nullpunkte und Pole, so können sie nur durch einen konstanten Faktor verschieden sein, denn ihr Verhältnis ist endlich auf der ganzen Kugel, also eine Konstante; wir wollen hiervon Gebrauch machen, um einen wichtigen Satz zu beweisen.

Digitized by Google

Es sei $u = \varphi(z)$ eine doppelperiodische Funktion zweiter Ordnung, und a und b seien ihre Pole; $\varphi'(z)$ wird dann zweimal unendlich in jedem dieser Punkte und nicht in anderen Punkten; diese Funktion, die doppelperiodisch ist und dasselbe Periodenparallelogramm hat wie u, wird also viermal unendlich und hat deshalb 4 Nullpunkte; diese seien α, β, γ und δ. Nun betrachten wir die doppelperiodische Funktion mit demselben Periodenparallelogramm

$$w = (\varphi(z) - \varphi(\alpha))(\varphi(z) - \varphi(\beta))(\varphi(z) - \varphi(\gamma))(\varphi(z) - \varphi(\delta)).$$

Diese wird zweimal Null in jedem der vier Punkte, denn für jeden von diesen ist nicht nur $w = 0$, sondern auch $w' = 0$. Sie hat also ihre Nullpunkte gemeinsam mit $(\varphi'(z))^2$. w wird ferner unendlich, wenn $\varphi(z)$ es wird, also viermal unendlich in jedem der Punkte a und b. Nun ist $\varphi'(z)$ zweimal unendlich, wo $\varphi(z)$ es einmal ist. w und $(\varphi'(z))^2$ haben also auch ihre Pole gemeinsam. Man erhält deshalb, wenn die Multiplikation in dem Ausdruck für w ausgeführt wird, eine Gleichung von der Form

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E, \tag{2}$$

aus der hervorgeht, dass *eine doppelperiodische Funktion zweiter Ordnung eine elliptische Funktion ist.* Fallen die Punkte a und b zusammen, so können wir eine ähnliche Betrachtung anwenden, aber wir erhalten dann für u'^2 ein Polynomium dritten Grades.

20. Da die Funktion $\varphi(z)$ einen Pol in a hat, so kann sie von diesem Punkte aus in einer Reihe entwickelt werden, die das eine gebrochene Glied $\frac{k}{z-a}$ hat, wo k eine Konstante bedeutet; vertauschen wir z mit $a + b - z$, erhalten wir das gebrochene Glied $\frac{-k}{z-b}$; aber da die Residuensumme Null ist, so erhält die Funktion $\varphi(z)$, wenn man sie von b aus entwickelt, eben dasselbe gebrochene Glied. Da sich also $\varphi(z)$ und $\varphi(a + b - z)$ in ihren Polen gleich verhalten, so kann ihre

Digitized by Google

Differenz nicht unendlich werden, muss also eine Konstante sein; setzt man $2z = a + b$, so sieht man, dass diese Konstante Null ist; man hat also identisch

$$\varphi(a + b - z) = \varphi(z), \tag{3}$$

woraus wiederum

$$\varphi'(a + b - z) = -\varphi'(z).$$

Dies wollen wir benutzen, um den folgenden Satz von *Liouville* zu beweisen:

Ist $F(z)$ eine doppelperiodische Funktion, die dasselbe Periodenparallelogramm hat wie $\varphi(z)$, so lässt $F(z)$ sich rational durch $\varphi(z)$ und $\varphi'(z)$ ausdrücken.

Um das zu beweisen, betrachten wir die beiden Funktionen

$$\psi(z) = F(z) + F(a + b - z) \text{ und } \psi_1(z) = \frac{F(z) - F(a + b - z)}{\varphi'(z)};$$

beide bleiben unverändert, wenn z mit $a + b - z$ vertauscht wird. Ihre Nullpunkte und Pole müssen also paarweise die Summe $a + b$ haben; ist $F(z)$ von der Ordnung n mit den Polen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, so erhält $\psi(z)$ dieselben Pole und ausserdem die Pole $a + b - \alpha_1, a + b - \alpha_2 \ldots$, so dass ψ von der Ordnung $2n$ ist. Ferner möge $\psi(z)$ die Nullpunkte $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ haben, die so zwischen den $2n$ Nullpunkten gewählt sind, dass nicht zwei von ihnen die Summe $a + b$ haben. $\psi(z)$ hat dann auch die Nullpunkte $a + b - \beta_1, a + b - \beta_2 \ldots$ Hieraus schliessen wir, dass man haben muss

$$\psi(z) = k \frac{(\varphi(z) - \varphi(\beta_1))(\varphi(z) - \varphi(\beta_2)) \ldots (\varphi(z) - \varphi(\beta_n))}{(\varphi(z) - \varphi(\alpha_1))(\varphi(z) - \varphi(\alpha_2)) \ldots (\varphi(z) - \varphi(\alpha_n))},$$

wo k eine Konstante bedeutet; man sieht nämlich leicht, dass $\psi(z)$ und der Bruch dieselben Nullpunkte und Pole haben. $\psi(z)$ ist also eine rationale Funktion von $\varphi(z)$.

$\psi_1(z)$ bleibt auch unverändert bei der Vertauschung von z mit $a + b - z$, und lässt sich deshalb ebenso wie $\psi(z)$ schreiben; dabei bleibt der Nenner derselbe, denn $\psi_1(z)$ hat dieselben Pole wie $\psi(z)$; wir können nämlich zeigen, dass die Nullpunkte von $\varphi'(z)$ auch Nullpunkte für den Zähler sind. Diese Nullpunkte findet man mit Hülfe der Gleichung $\varphi'(a+b-z) = -\varphi'(z)$,

aus der hervorgeht, dass $\frac{1}{2}(a+b)$ ein Nullpunkt oder ein Pol sein muss; das letzte ist jedoch unmöglich, da es keine anderen Pole giebt als a und b. Auf dieselbe Weise sehen wir, dass wir auch Nullpunkte erhalten, wenn wir zu $\frac{1}{2}(a+b)$ die Hälfte einer Periode oder die Hälfte der Summe der Perioden addieren; wir haben also die vier Nullpunkte des Nenners bestimmt und sehen sofort, dass diese auch Nullpunkte des Zählers sind.

Wir erhalten also, wenn A, B und C Polynome $n$ten Grades in $\varphi(z)$ bedeuten,

$$F(z)+F(a+b-z)=\frac{A}{C};\quad F(z)-F(a+b-z)=\frac{B\varphi'(z)}{C},$$

und daraus

$$F(z)=\frac{A+B\varphi'(z)}{2C} \tag{5}$$

PRIMÄRE FAKTOREN.

21. Da die doppelperiodischen Funktionen nach unserer Voraussetzung in der ganzen Ebene keine anderen singulären Punkte als Pole haben, so lassen sie sich unter der Form (7) in 98 (S. 198) darstellen. Wir wollen versuchen die Grade der Polynome g und k zu bestimmen; ist a einer von den Nullpunkten, so wollen wir also untersuchen, welchen Wert wir α geben müssen, damit $\Sigma|a|^{-\alpha}$ konvergent wird.

In jedem Punkte z der Ebene errichten wir eine Senkrechte, deren Länge $|z|^{-\alpha}$ ist; dadurch erhalten wir eine Umdrehungsfläche, die sich im Unendlichen der Ebene nähert. Wenn wir mit a einen der Nullpunkte in einem Periodenparallelogramm und die analogen bezeichnen und den Inhalt des Parallelogramms zu 1 annehmen, so stellt $|a|^{-\alpha}$ das Volumen eines Prismas dar mit dieser Grösse als Höhe und dem Parallelogramm als Grundfläche; lassen wir das Prisma oben von der Umdrehungsfläche begrenzt werden, so erhalten wir ein anderes Volumen, dessen Verhältnis zum ersten Prisma sich für ferne Parallelogramme der 1 nähert. Die gesuchte Summe ist also endlich oder unendlich gleichzeitig mit dem von der Ebene und der Umdrehungsfläche begrenzten Volumen. Nun ist dieses Volumen

Digitized by Google

$$2\pi \int r^{1-\alpha} dr,$$

ein Ausdruck, der für unendlich grosse r endlich bleibt für $\alpha > 2$. Wir müssen deshalb, um eine konvergente Modulusreihe zu erhalten, $\alpha = 3$ setzen. Wir haben nur einen einzigen Nullpunkt in jedem Parallelogramm betrachtet, aber da in einem solchen nur eine endliche Anzahl von ihnen vorkommt, so wird das Resultat dadurch nicht verändert. Dieselbe Betrachtung lässt sich auf die Pole anwenden.

Hieraus folgt, dass wir für das a entsprechende Glied in der logarithmisch Abgeleiteten der Funktion

$$\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} \tag{6}$$

nehmen müssen (97), so dass die Polynome g und k vom zweiten Grade sind; dadurch sind die primären Faktoren des Zählers und Nenners bestimmt. Es ist noch übrig, die ganze transcendente Funktion (oder das Polynom) G' zu bestimmen, die möglicherweise zu der Reihe der Glieder (6) hinzuzufügen ist.

Ist die Funktion doppelperiodisch, so muss dasselbe von ihrer logarithmisch Abgeleiteten und auch von deren Abgeleiteten gelten; diese besteht, abgesehen von G'', aus Gliedern von der Form

$$\pm \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right), \tag{7}$$

wo das obere Vorzeichen für die Pole, das untere für die Nullpunkte gilt; diese Glieder bilden eine in der ganzen Ebene unbedingt konvergente Reihe, und man sieht leicht, das deren Summe nicht verändert wird, wenn z eine Zunahme von einer Periode erfährt. Die Summe der Reihe ist also eine doppelperiodische Funktion mit den Perioden der gegebenen Funktion. Daraus folgt, dass die unbekannte Funktion G'', die möglicherweise hinzuzufügen ist, nur eine Konstante sein kann, denn eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion, die nicht konstant ist, kann nicht doppelperiodisch sein. G kann also höchstens vom zweiten Grade sein, und wir haben dadurch

Digitized by Google

gezeigt, dass *eine doppelperiodische Funktion dargestellt werden kann als das Verhältnis zwischen zwei ganzen transcendenten Funktionen vom Genre 2.*

ÜBER PERIODENPAARE.

22. Ist ein Parallelogramm aus mehreren Periodenparallelogrammen zusammengesetzt, so ist es selbst ein Periodenparallelogramm; umgekehrt lässt ein Periodenparallelogramm sich zuweilen in mehrere teilen; wir wollen annehmen, dass uns ein solches, zu einer gegebenen Funktion gehöriges, Parallelogramm, gegeben sei, und dass sich für diese Funktion keine Periodenparallelogramme von kleinerer Fläche bilden lassen. Die dadurch bestimmten Perioden, die wir mit ω_1 und ω_2 bezeichnen wollen, heissen ein *primitives Periodenpaar;* wir wollen zeigen, dass jede andere Periode sich als $m\omega_1 + n\omega_2$ schreiben lässt, wo m und n ganze Zahlen bedeuten.

Sind die Perioden $\alpha_1 + \beta_1 i$ und $\alpha_2 + \beta_2 i$, so wird wie bekannt der Inhalt des dadurch bestimmten Parallelogramms, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, gleich der Determinante (α_1, β_2); wenden wir nun auf die beiden Perioden eine lineare Transformation an, indem wir

$$\omega'_1 = m_1\omega_1 + n_1\omega_2;\quad \omega'_2 = m_2\omega_1 + n_2\omega_2 \tag{8}$$

setzen, so wird nach einem bekannten Satze die zu (ω'_1, ω'_2) gehörende Determinante gleich dem Produkte aus der ursprünglichen und der Substitutionsdeterminante (m_1, n_2); das lässt sich folgendermassen ausdrücken:

Wendet man eine lineare Transformation auf ein Parallelogramm an, so wird dessen Inhalt mit der Substitutionsdeterminante multipliciert.

Hieraus folgt nun, dass alle Periodenpaare sich aus einem primitiven Paare durch lineare Transformationen mit ganzen Koefficienten bilden lassen; wenn wir nämlich in (8) ein Periodenpaar haben, bei dem m_1, n_1, m_2 und n_2 nicht ganze Zahlen sind, so können wir durch Benutzung von ω_1 und ω_2 leicht ein neues Periodenpaar bilden, dessen Koefficienten echte Brüche

Digitized by Google

sind mit einer Determinante kleiner als 1. Das ist indessen unmöglich, da es unserer Definition eines primitiven Periodenpaares widerstreitet.

Zugleich ersehen wir hieraus, dass *zwei primitive Periodenpaare aus einander gebildet werden durch eine Transformation mit der Determinante* ± 1. Von solchen Transformationen sind die einfachsten

$$(9) \qquad \omega_1' = \omega_2; \; \omega_2' = -\omega_1 \quad \text{und} \quad \omega_1' = \omega_1; \; \omega_2' = \pm\omega_1 + \omega_2;$$

sie haben die Determinante $+1$. Durch die erste bilden wir aus einem Parallelogramm ein damit kongruentes Nachbarparallelogramm; durch die übrigen bilden wir ein neues Parallelogramm mit unveränderter Grundlinie und Höhe.

23. Da ein gegebenes Periodenparallelogramm nur das entsprechende Periodenpaar, abgesehen vom Vorzeichen, bestimmt, so wollen wir hier eine nähere Bestimmung treffen, indem wir zwischen *erster* und *zweiter* Periode unterscheiden und diesen beziehungsweise den Index 1 und 2 erteilen. Diese Perioden sollen dann so bestimmt werden, dass *der Winkel von der ersten nach der zweiten positiv ist und kleiner als* π. Dass bringt mit sich, dass *der Koefficient von i im Periodenverhältnis* $\omega_2 : \omega_1$ *positiv ist,* und dass *der Inhalt des Periodenparallelogramms, gemessen durch* $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$, *positiv ist.* Um an dieser Regel bei der Bildung von neuen Periodenparallelogrammen festhalten zu können, müssen wir also das Übereinkommen treffen, nur lineare Transformationen mit positiver Determinante zu benutzen. Diese Regel bringt es mit sich, dass wir die beiden Perioden vertauschen können, wenn wir nur gleichzeitig die eine das Vorzeichen wechseln lassen. Ein gegebenes Parallelogramm bestimmt also, abgesehen von Transformationen, bei denen beide Perioden ihr Vorzeichen wechseln, nur zwei Periodenpaare, und diese lassen sich aus einander durch die erste Transformation (9) ableiten.

Statt ein Periodenpaar zu betrachten, können wir, wenn wir nur auf die Form des Parallelogramms sehen, das Periodenverhältnis betrachten, bei dem wir die zweite Periode zum Zähler nehmen; wir bezeichnen dieses durch denselben Buch-


Digitized by Google

staben wie die Perioden, aber ohne Index; die allgemeine lineare Transformation, die von einem primitiven Periodenverhältnis zu einem beliebigen führt, ist dann

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \tag{10}$$

wo a, b, c und d ganze Zahlen sind, und die Determinante $ad - bc$ positiv ist; ist der Wert dieser gleich 1, so gehört das neue Verhältnis zu einem primitiven Periodenpaar. Wenden wir zwei solche Transformationen nach einander an, so kann dies Verfahren durch Anwendung einer einzigen Transformation derselben Art ersetzt werden, mithin:

Alle linearen Transformationen, die primitive Periodenverhältnisse in einander überführen, bilden eine Gruppe von Transformationen mit der Determinante 1.

24. *Alle zu dieser Gruppe gehörenden Transformationen lassen sich bilden durch successive Anwendung der drei, die sich aus (9) ableiten lassen:*

$$\omega' = -1 : \omega \text{ und } \omega' = \omega \pm 1. \tag{11}$$

Wir können nämlich in (10), wenn a numerisch grösser ist als c, eine solche ganze, positive oder negative Zahl addieren, dass wir für a eine Zahl erhalten, die numerisch kleiner ist als c. Dadurch haben wir die zweite Transformation in (11) eine gewisse Anzahl Male angewandt. Nun wenden wir die erste in (11) an, und erhalten dadurch einen Ausdruck von der Form (10) mit einem a, das numerisch grösser ist als c. Fahren wir auf diese Weise fort, so führen wir dieselben Rechnungen aus, wie wenn wir den grössten gemeinschaftlichen Faktor für die relativen Primzahlen a und c suchen, und wir müssen deshalb zuletzt zu einem Bruche von der Form

$$\frac{\omega + \alpha}{\beta}$$

gelangen; da wir nur lineare Transformationen mit der Determinante 1 angewandt haben, so müssen wir dieselbe Determinante haben, also $\beta = 1$.

Digitized by Google

Da die erste der Transformationen in (9) ein Periodenparallelogramm nicht verändert, während die beiden letzten einen Teil von diesem abschneiden, aber einen damit kongruenten Teil hinzufügen, der aus dem ersten durch Verschiebung um den Betrag einer Periode gebildet ist, so muss die Funktion in zwei primitiven Parallelogrammen dieselben Werte gleich viele Male annehmen.

Wir zeigten hier, dass die Transformationen (9) jedes primitive Periodenparallelogramm in jedes andere überführen können; derselbe Beweis zeigt, dass wir durch dieselben Transformationen ein beliebiges Periodenparallelogramm in ein anderes von demselben Inhalt überführen können. Hieraus folgt, dass, wenn der Inhalt eines Parallelogramms $n$mal grösser ist als der Inhalt eines anderen, die Funktion in dem ersten jeden ihrer Werte in $n$mal so vielen Punkten annehmen muss wie in dem zweiten; man sieht nämlich sofort, dass der Satz richtig ist, wenn das eine Parallelogramm (ω_1, ω_2) ist, das andere $(n\omega_1, \omega_2)$, und dann muss der Satz allgemein gelten.

Mit Hülfe des hier Entwickelten können wir nun einige der früher bewiesenen Sätze erweitern.

25. *Haben zwei doppelperiodische Funktionen ein gemeinsames Periodenparallelogramm, so sind sie algebraische Funktionen von einander.*

Es seien $u = f(z)$ und $v = F(z)$, beziehungsweise von der Ordnung m und n, die beiden Funktionen, und das gemeinsame Periodenparallelogramm möge die primitiven Parallelogramme beziehungsweise p- und $q$mal enthalten. Einem gegebenen Werte von u entsprechen also in dem gemeinsamen Parallelogramm mp Werte von z, und deshalb mp Werte von v; u entsprechen zugleich die den mp Punkten des Parallelogramms homologen Punkte der analogen Parallelogramme, aber zwei homologe Punkte geben denselben Wert von v. Wir sehen also, das jedem Werte von u mp Werte von v entsprechen, und auf dieselbe Weise, das jedem Werte von v nq Werte von u entsprechen. Das führt mit sich, dass zwischen u und v eine algebraische Gleichung existieren muss, die in v vom Grade mp, in u vom Grade nq ist, jedoch nur, wenn wir beweisen

Digitized by Google

können, dass v als Funktion von u keine anderen singulären Punkte haben kann, als Pole und algebraische Verzweigungspunkte.

z_1 möge nun u und v die Werte u_1 und v_1 erteilen. Ist z_1 eine einfache Wurzel der Gleichung $f(z) = u_1$, so hat man in der Umgegend von u_1

$$z - z_1 = (u - u_1)\varphi(u),$$

wo $\varphi(u)$ holomorph und nicht Null in u_1 ist. Ferner haben wir, wenn z_1 kein Pol für v ist,

$$v - v_1 = (z - z_1)\varphi_1(z),$$

wo $\varphi_1(z)$ endlich ist. Hieraus folgt

$$v - v_1 = (u - u_1)A,$$

wo A endlich ist. u_1 ist also kein singulärer Punkt für v, wenn v als Funktion von u betrachtet wird.

Ist z_1 dagegen ein Pol $m$ter Ordnung für v, so hat man

$$v = (z - z_1)^{-m}\varphi_1(z),$$

und durch Einsetzen des Ausdrucks für z ergiebt sich, dass v einen Pol $m$ter Ordnung in u_1 erhält.

Ist z_1 eine $p$fache Wurzel, so können wir dennoch dieselben Betrachtungen anwenden, wenn wir eine neue Variable einführen, indem wir nämlich $u - u_1$ durch $(\mu - \mu_1)^p$ ersetzen; wir erhalten dann in den Gleichungen oben $\mu - \mu_1$ statt $u - u_1$, oder, wenn wir wieder u einführen,

$$v - v_1 = (u - u_1)^{\frac{1}{p}} A,$$

woraus hervorgeht, dass u_1 ein Verzweigungspunkt ist, in dem p Werte zusammenfallen. Wenn wir endlich für $u = \infty$ auf gewöhnliche Weise den reciproken Wert einführen, so gelangen wir zu dem Resultat, dass v als Funktion von u keine anderen singulären Punkte haben kann als Pole und algebraische Verzweigungspunkte; der aufgestellte Satz ist also bewiesen.

26. Der Grad der algebraischen Gleichung kann in beson-

Digitized by Google

deren Fällen niedriger werden; es lässt sich nämlich folgender Satz beweisen:

Wenn die Funktionen u und v beide unverändert bleiben durch dieselbe Gruppe von linearen Transformationen von z (z. B. wenn sie beide gerade Funktionen von z sind), *so wird der Grad sowohl in u wie in v durch diejenige Zahl dividiert, welche die Anzahl von Transformationen der Gruppe angiebt.*

Es möge nämlich ein beliebiger Punkt z durch die Transformationen der Gruppe übergehen in $z_1, z_2 \dots z_k$[1]; in diesen k Punkten erhält u denselben Wert u_1; wenn u_1 mehrere Punkte z entsprechen, so müssen diese sich auch in Gruppen von je k Punkten teilen; jeder Gruppe von Punkten entspricht indessen nur ein Wert von v, so dass die ganze Wertanzahl für v durch k zu dividieren ist. Dieselbe Betrachtung gilt für u.

27. *Eine doppelperiodische Funktion und ihre Abgeleitete sind durch eine algebraische Gleichung verbunden.*

Das folgt aus 25, da die beiden Funktionen dasselbe primitive Periodenparallelogramm haben. Ist u von der Ordnung n, so wird u' von der Ordnung $2n$, wenn alle Pole getrennt sind, von der Ordnung $n+1$, wenn sie alle zusammenfallen. In anderen Fällen liegt die Ordnung zwischen diesen beiden Zahlen. Dadurch werden die Grade der Gleichung in u und u' bestimmt. Die Grade können hier nicht niedriger werden, denn in den n Punkten, in denen u denselben Wert hat, muss u' verschiedene Werte haben; man hat nämlich

$$z - z_1 = \int_{u_1}^{u} \frac{du}{u'},$$

woraus hervorgeht, dass der Unterschied zwischen den z die denselben u und u' entsprechen, eine Anzahl von den Perioden ist, die zu der umgekehrten Funktion u des Integrals gehören,

---

[1]) Wenn einige von diesen Punkten ausserhalb des Parallelogramms fallen, so werden sie durch die ihnen homologen Punkte im Parallelogramm ersetzt.


Digitized by Google

und zwei verschiedene z mit einem solchen Unterschied können nicht in demselben Periodenparallelogramm liegen.

Da u' für endliche u nicht unendlich werden kann, so muss in der Gleichung, nachdem sie nach u' geordnet und auf ganze Form gebracht ist, der erste Koefficient konstant sein. Da ferner die Summe der n Werte von z, die einem gegebenen u entsprechen, konstant ist, so muss die Summe der entsprechenden reciproken Werte von u' Null sein, so dass das nächstletzte Glied auf der linken Seite der Gleichung fortfallen muss. Setzt man

$$u = \frac{1}{v}; \; u' = -\frac{v'}{v^2},$$

so erhält man wieder eine Gleichung zwischen einer doppelperiodischen Funktion und ihrer Abgeleiteten, und diese muss aus demselben Grunde wie die vorige, nachdem sie auf ganze Form gebracht worden ist, ihren ersten Koefficienten konstant haben; ist nun das allgemeinen Glied in der ursprünglichen Gleichung

$$U_p u'^{n-p},$$

so wird es in der transformierten (abgesehen vom Vorzeichen)

$$V_p v^{2p} v'^{n-p},$$

wo V dasjenige bedeutet, was durch die Transformation aus U entstanden ist. Ist U_p nun vom Grade α in u, so wird der transformierte Koefficient vom Grade $2p - \alpha$ in v; da diese Zahl nicht negativ werden darf, so sehen wir, das U_p höchstens vom Grade $2p$ sein kann.

28. *Eine doppelperiodische Funktion v lässt sich rational durch eine andere u und deren Abgeleitete ausdrücken,* wenn die beiden Funktionen dasselbe Periodenparallelogramm haben und dieses primitiv für u ist.

Da in dem primitiven Periodenparallelogramm zu den verschiedenen z, die demselben Werte von u entsprechen, verschiedene Werte von u' gehören, so bestimmt ein gegebenes Wertepaar (u, u') im Parallelogramm nur einen Punkt z, also auch nur einen Wert von v; das gilt, selbst wenn das Paral-

Digitized by Google

lelogramm nicht primitiv für v ist. Nun möge u einen beliebigen Wert haben, und die entsprechenden Werte von z im Parallelogramm mögen v die Werte $v_1, v_2 \ldots v_n$ erteilen, während die entsprechenden Werte von u' durch $u'_1, u'_2 \ldots u'_n$ dargestellt werden. Erstreckt sich die Summation auf die n Punkte, so erhält man dann, dass die Summen

$$\Sigma v, \ \Sigma v u', \ \Sigma v u'^2 \ldots \Sigma v u'^{n-1}$$

auf der ganzen u-Kugel eindeutige Funktionen von u ohne wesentlich singuläre Punkte sind. Diese Summen sind also alle rationale Funktionen von u. Wir bezeichnen sie beziehungsweise mit $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$.

Nun sei $f(u', u) = 0$ die algebraische Gleichung zwischen u und u'; setzen wir

$$(12) \quad \frac{f(u', u)}{u' - u'_1} = u'^{n-1} + A_1 u'^{n-2} + A_2 u'^{n-3} + \ldots + A_{n-1} = 0,$$

so wird dieser Gleichung, deren Koefficienten ganze Funktionen von u'_1 sind, genügt werden durch $u'_2, u'_3 \ldots u'_n$.

Wir multiplicieren nun die n Gleichungen

$$\Sigma v = U_0, \ \Sigma v u' = U_1 \ldots \Sigma v u'^{n-1} = U_{n-1}$$

beziehungsweise mit $A_{n-1}, A_{n-2} \ldots A_1$, 1 und addieren. Dabei fallen auf Grund der in (12) einbegriffenen Gleichungen alle Glieder auf der linken Seite fort mit Ausnahme derjenigen, die u'_1 enthalten. Dadurch erhalten wir

$$(13) \quad \begin{aligned} & v_1(A_{n-1} + A_{n-2} u'_1 + \ldots + u'^{n-1}_1) \\ & = A_{n-1} U_0 + A_{n-2} U_1 + \ldots + U_{n-1}, \end{aligned}$$

und hierdurch wird v_1 rational durch u und u'_1 ausgedrückt. Wir können hier indessen den Index fortlassen, da er einem beliebigen von den Punkten entspricht, haben also v rational durch u und u' ausgedrückt.

29. *Haben v und u ein gemeinsames Periodenparallelogramm (Ω_1, Ω_2), welches das zu u gehörende primitive Parallelogramm m-mal enthält, so wird v bestimmt durch eine Gleichung vom Grade m mit Koefficienten, die rationale Funktionen von u und u' sind.*


Digitized by Google

Jedem Wertepaare (u, u') entspricht nämlich in (ω_1, ω_2) ein Wert von v, also in (Ω_1, Ω_2) m Werte von v. Symmetrische Funktionen von diesen m Werten werden doppelperiodische Funktionen mit den Perioden ω_1 und ω_2. Sie lassen sich deshalb nach 28 rational durch u und u' ausdrücken, und aus ihnen werden die Koefficienten zu der gesuchten Gleichung vom Grade m rational bestimmt.

Die meisten der hier bewiesenen Sätze verdanken wir *Briot* und *Bouquet* (Théorie des fonctions elliptiques, Paris 1875).

KAPITEL III.

JACOBIS θ-FUNKTIONEN.

DIE PERIODICITÄT.

30. Die Ebene möge in Parallelogramme eingeteilt sein und der Punkt 0 in der einen Ecke eines solchen liegen, so dass die von ihm ausgehenden Seiten ω_1 und ω_2 sind; wenn ω das Periodenverhältnis bezeichnet, so setzen wir

$$\pi i \omega = a;\quad 2\pi i z = \omega_1 \zeta;\quad e^a = q. \tag{1}$$

In der ζ-Ebene sind die Perioden $2\pi i$ und $2a$. Einem Punkte $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ in der z-Ebene entspricht der Punkt $\alpha\cdot 2\pi i + \beta\cdot 2a$ in der ζ-Ebene. Da der imaginäre Teil von ω einen positiven Koefficienten hat, *so wird der reelle Teil von a negativ und* $|q| < 1$.

Wir betrachten nun die nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufende Reihe

$$\theta_3(z) = \ldots + e^{-2\zeta + 4a} + e^{-\zeta + a} + 1 + e^{\zeta + a} + e^{2\zeta + 4a} + \ldots + e^{n\zeta + n^2 a} + \ldots \tag{2}$$

Da die Reihe der Moduln der Glieder konvergent ist für alle endlichen ζ oder z, so haben wir hierdurch eine ganze transcendente Funktion $\theta_3(z)$ definiert; wir wollen nun ihre Eigenschaften genauer untersuchen.

Digitized by Google

Vertauschen wir z mit $-z$, so bleibt die Reihe unverändert; *die Funktion ist also gerade.*

Erteilen wir z die Zunahme ω_1, also ζ die Zunahme $2\pi i$, so bleiben die einzelnen Glieder der Reihe unverändert. $\theta_3(z)$ ist also *periodisch* mit der Periode ω_1.

Erteilen wir z die Zunahme ω_2, also ζ die Zunahme $2a$, so geht das allgemeine Glied über in

$$e^{n(\zeta+2a)+n^2 a} = e^{-(\zeta+a)} e^{(n+1)\zeta+(n+1)^2 a},$$

woraus hervorgeht, dass das Resultat dasselbe ist, welches wir erhalten, wenn wir (2) mit $e^{-(\zeta+a)}$ multiplicieren; wir erhalten also

$$(3) \qquad \theta_3(z+\omega_1) = \theta_3(z); \;\; \theta_3(z+\omega_2) = e^{-(\zeta+a)}\,\theta_3(z).$$

ω_2 ist also keine gewöhnliche Periode, da seine Hinzufügung bewirkt, dass die Funktion mit einem exponentiellen Faktor multipliciert wird; der Kürze wegen wollen wir jedoch auch ferner ω_2 die zweite Periode nennen.

31. Setzen wir $\zeta = \pi i + a$, das heisst gleich dem Mittelpunkt des Parallelogramms, so heben die Glieder der Reihe sich zu je zweien, so dass der Punkt ein Nullpunkt für die Funktion wird; aus den Gleichungen (3) folgt dann, dass diese Eigenschaft den Mittelpunkten aller Parallelogramme zukommt. Wir haben also einen Nullpunkt in jedem Parallelogramm gefunden, und können nachweisen, dass es nicht mehr giebt. Ihre Anzahl wird nämlich, da die Funktion keine Pole hat, bestimmt durch

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\,l\,\theta_3(z),$$

wo das Integral in positiver Richtung längs dem Umfange des Parallelogramms zu nehmen ist.

Nun hat die Funktion jedoch dieselben Werte auf dem einen Paar gegenüberliegender Seiten des Parallelogramms, so dass das Integral, längs diesen beiden Seiten genommen, Null wird. Auf dem anderen Seitenpaare gilt dasselbe, wenn wir von dem exponentiellen Faktor absehen, der auf der einen Seite

Digitized by Google

hinzukommt; es bleibt dann nur noch übrig, das Glied $dle^{-(\zeta+a)}$ zu betrachten, wo ζ die erste Periode in negativer Richtung durchläuft. Das Integral erhält dadurch den Wert $2\pi i$, so dass das Parallelogramm nur einen Nullpunkt enthält. Mithin:

Die Nullpunkte für $\theta_3(z)$ sind die Mittelpunkte der Parallelogramme.

32. In der Reihe (2) hatten alle Glieder den Koefficienten 1. Setzt man statt dessen eine periodische Reihe von Koefficienten, $a_1, a_2 \ldots a_\mu$, so findet man auf dieselbe Weise wie oben, dass ω_1 Periode wird, während eine Zunahme von $\mu\omega_2$ für z bewirkt, dass die Funktion multipliciert wird mit $e^{-(\mu\zeta+\mu^2 a)}$. Die Anzahl der Nullpunkte in jedem Parallelogramm ergiebt sich in diesem Falle gleich μ. Unsere ursprüngliche Funktion ist in dieser mit einbegriffen, und zwar erhalten wir sie für $\mu = 1$; $a_1 = 1$.

33. Die logarithmisch Abgeleitete von $\theta_3(z)$ hat die Periode ω_1; wir wollen untersuchen, wie sie sich gegenüber ω_2 verhält. Wir erhalten dann aus (3)

$$\frac{\theta_3'(z+\omega_2)}{\theta_3(z+\omega_2)} - \frac{\theta_3'(z)}{\theta_3(z)} = -\frac{2\pi i}{\omega_1}, \tag{4}$$

und sehen also, dass die logarithmisch Abgeleitete von $\theta_3(z)$ eine konstante Zunahme erfährt, wenn z die Zunahme ω_2 erfährt. Differentiieren wir die gefundene Gleichung, so fällt die Konstante fort. Mithin:

Die Abgeleitete der logarithmisch Abgeleiteten von $\theta_3(z)$ ist eine doppelperiodische Funktion mit den Perioden ω_1 und ω_2.

34. Wir können auch auf andere Art und Weise doppelperiodische Funktionen bilden; es sei $c = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ der Nullpunkt für $\theta_3(z)$, und wir setzen

$$\frac{\theta_3'(z+c)}{\theta_3(z+c)} = \psi(z).$$

Für $z = 0$ wird der Nenner des Bruches zu Null, so dass $\psi(z)$ einen Pol in diesem Punkte hat. $\psi(z - a_1)$ wird dann einen Pol im Punkte a_1 haben, der beliebig gewählt werden kann; wir bilden nun die Funktion

Digitized by Google

$$(5) \quad F(z) = A_1\psi(z-\alpha_1) + A_2\psi(z-\alpha_2) + \ldots + A_k\psi(z-\alpha_k) + B,$$

wo B eine willkürliche Konstante bedeutet; dasselbe gilt von den Grössen A, obwohl diese jedoch der Bedingung unterworfen sind, dass ihre Summe Null sein muss.

Wir sehen nun sofort, dass $F(z)$ die Periode ω_1 hat; sie hat indessen auch die Periode ω_2, denn wenn z diese Zunahme erfährt, so erhalten alle Funktionen ψ dieselbe konstante Zunahme, und da $\Sigma A = 0$, so bleibt $F(z)$ unverändert. $F(z)$ ist also eine doppelperiodische Funktion mit den Perioden ω_1 und ω_2; sie hat im Periodenparallelogramm k willkürlich gewählte Pole, ist also von der Ordnung k; sie enthält ferner k arbiträre Konstanten; diese lassen sich so bestimmen, dass die Funktion im Periodenparallelogramm $k-1$ willkürlich gewählte Nullpunkte erhält.

Hierbei bleibt in der Funktion noch ein unbestimmter Faktor zurück. Der fehlende Nullpunkt wird dadurch bestimmt, dass die Summe der Nullpunkte, abgesehen von Perioden, gleich der Summe der Pole ist, eine Bestimmung, die immer einen Punkt im Parallelogramm liefert.

Da eine doppelperiodische Funktion, abgesehen von einem konstanten Faktor, durch ihre Nullpunkte und Pole bestimmt ist, so haben wir in (5) die allgemeine Form für eine doppelperiodische Funktion von der Ordnung k.

Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Pole verschieden sind, da nicht genug arbiträre Konstanten zur Bestimmung der Nullpunkte bleiben, wenn einige der Pole α zusammenfallen. Wir wollen z. B. annehmen, dass α_2 und α_3 mit α_1 zusammenfallen. Dann können wir statt der drei ersten Glieder in (5) setzen:

$$A_1\psi(z-\alpha_1) + B_1\psi'(z-\alpha_1) + C_1\psi''(z-\alpha_1);$$

diese Funktion wird dreimal unendlich in α_1 und enthält drei Konstanten. Die Relation zwischen den Koefficienten ist dauernd $\Sigma A = 0$, da ψ' und ψ'' doppelperiodisch sind.

Das Resultat unserer Untersuchung ist also folgendes:

Man kann für ein willkürlich gegebenes Periodenparal-

Digitized by Google

lelogramm eine doppelperiodische Funktion von gegebener Ordnung so bilden, dass ihre Pole und Nullpunkte, abgesehen von einem, willkürlich gegebene Punkte sind. Die Funktion ist bis auf einen konstanten Faktor vollkommen bestimmt.

35. Wir können übrigens einen anderen Ausdruck für die doppelperiodische Funktion darstellen, und zwar einen solchen, dass auch die Nullpunkte deutlich hervortreten; diese seien $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$, wo $\Sigma\alpha = \Sigma\beta$. Wir setzen

$$(6) \quad F(z) = A\frac{\theta_3(z+c-\beta_1)\,\theta_3(z+c-\beta_2)\ldots\theta_3(z+c-\beta_k)}{\theta_3(z+c-\alpha_1)\,\theta_3(z+c-\alpha_2)\ldots\theta_3(z+c-\alpha_k)}.$$

Man sieht sofort, dass diese Funktion ihre Nullpunkte und Pole in den gegebenen Punkten hat[1]), und dass ihr die Periode ω_1 zukommt. Erteilen wir z die Zunahme ω_2, so werden die einzelnen Faktoren in (6) mit exponentiellen Faktoren multipliciert; aus den Exponenten von diesen, welche die Form

$$-\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z+c-\begin{Bmatrix}\beta\\\alpha\end{Bmatrix}\right)-\pi i\omega$$

haben, können wir die für alle Faktoren gemeinsamen Glieder fortlassen, denn sie heben sich auf, da gleich viele Faktoren im Zähler und Nenner des Bruches sind. Die übrigen Glieder erhalten, abgesehen von einem konstanten Faktor die Summe $\Sigma\alpha - \Sigma\beta$, aber diese Summe ist nach unserer Voraussetzung gleich Null. $F(z)$ hat also auch die Periode ω_2.

36. Ziehen wir in (2) die Glieder zu je zweien zusammen, so erhalten wir, wenn wir $2\pi z = \omega_1 \alpha$ setzen,

$$(7) \qquad \theta_3(z) = 1 + 2q\cos\alpha + 2q^4\cos 2\alpha + 2q^9\cos 3\alpha + \ldots;$$

$$(8) \qquad \theta_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

Nach der Definition ist $|q| < 1$. Der Konvergenzkreis der Reihen hat den Radius 1, und die durch die Reihen bestimmten

---

[1]) Von diesen kann der eine, der aus den übrigen bestimmt wird, ausserhalb des Parallogramms fallen, aber es giebt dann einen dazu homologen Punkt im Parallelogramm.


Digitized by Google

Funktionen von q können über diesen Kreis hinaus nicht erweitert werden.

37. Wir führen nun drei andere Funktionen ein, die alle ganze Transcendenten sind, nämlich

$$(9)\qquad \theta(z) = \theta_3(z + \tfrac{1}{2}\omega_1) = 1 - 2q\cos\alpha + 2q^4\cos 2\alpha - 2q^9\cos 3\alpha \ldots$$

Man erhält hier

$$(10)\qquad \theta(z+\omega_1) = \theta(z);\ \theta(z+\omega_2) = -e^{-(\zeta+\alpha)}\theta(z);\ \theta\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0.$$

$$(11)\qquad \theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots$$

$$(12)\qquad \theta_2(z) = e^{\frac{1}{4}(2\zeta+\alpha)}\theta_3(z+\tfrac{1}{2}\omega_2) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\tfrac{3}{2}\alpha + 2q^{\frac{25}{4}}\cos\tfrac{5}{2}\alpha + \ldots$$

$$(13)\qquad \theta_2(z+\omega_1) = -\theta_2(z);\ \theta_2(z+\omega_2) = e^{-(\zeta+\alpha)}\theta_2(z);\ \theta_2(\tfrac{1}{2}\omega_1) = 0.$$

$$(14)\qquad \theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots$$

Wir sehen, dass diese Funktion das Vorzeichen wechselt, wenn z die Zunahme ω_1 erfährt; sie hat also die Periode $2\omega_1$; dieselbe Bemerkung gilt für die folgende Funktion:

$$(15)\qquad \theta_1(z) = \frac{1}{i}e^{\frac{1}{4}(2\zeta+\alpha)}\theta_3\left(z + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\tfrac{3}{2}\alpha + \ldots$$

$$(16)\qquad \theta_1(z+\omega_1) = -\theta_1(z);\ \theta_1(z+\omega_2) = -e^{-(\zeta+\alpha)}\theta_1(z);\ \theta_1(0) = 0.$$

Hieraus werden nun wieder Formeln für die Änderung der Funktionen abgeleitet, wenn z um halbe Perioden wächst, nämlich

$$\theta_3\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right) = \theta(z);\ \theta\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right) = \theta_3(z);$$

$$(17)\qquad \theta_2\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right) = -\theta_1(z);\ \theta_1\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right) = \theta_2(z),$$

und ferner, wenn wir $q^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{-\pi i z}{\omega_1}}$ durch γ bezeichnen,

$$\theta_3\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right) = \gamma\theta_2(z);\ \theta\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right) = i\gamma\theta_1(z);$$

$$(18)\qquad \theta_2\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right) = \gamma\theta_3(z);\ \theta_1\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right) = i\gamma\theta(z).$$

Digitized by Google

Aus diesen wird wieder abgeleitet, wenn c die halbe Periodensumme bedeutet,

$$
\tag{19}
\begin{gathered}
\theta_3(z+c) = i\gamma\theta_1(z);\ \theta(z+c) = \gamma\theta_2(z);\\
\theta_2(z+c) = -i\gamma\theta(z);\ \theta_1(z+c) = \gamma\theta_3(z).
\end{gathered}
$$

Die Reihenentwickelungen zeigen, dass die Funktion $\theta_1(z)$ ungerade ist, während die übrigen gerade sind.

ZERLEGUNG IN FAKTOREN.

38. Da die Nullpunkte der vier Funktionen homologe Punkte in den Periodenparallelogrammen sind, so gelten die Betrachtungen, die wir in 21 angestellt haben, und es ist dadurch die Form der primären Faktoren bestimmt. Da die Abgeleitete der logarithmisch Abgeleiteten jeder der Funktionen eine doppelperiodische Funktion ist, so erhält man, wenn Θ irgend eine von den Funktionen bedeutet, und deren Nullpunkt durch a bezeichnet wird $\left(\text{ist } a=0, \text{ so fällt } \frac{1}{a^2} \text{ fort}\right)$

$$
\tag{20}
\frac{\Theta''}{\Theta} - \left(\frac{\Theta'}{\Theta}\right)^2 = -\sum\left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2}\right) + K,
$$

wo K eine Konstante bedeutet, die man dadurch bestimmen kann, dass man $z=0$ setzt. Nun ist für die drei geraden Funktionen $\Theta'(0)=0$. Für $\theta_1(z)$ können wir nicht direkt $z=0$ setzen, da dieser Punkt ein Pol (zweiter Ordnung) für die doppelperiodische Funktion ist; wir können indessen in (20) das auf der rechten Seite vorkommende Glied $-z^{-2}$ nach der linken Seite bringen und dann den wahren Wert des dort stehenden Ausdrucks für $z=0$ bestimmen. Das Resultat, das durch unendliche Reihen ausgedrückt wird, für die wir später einfachere Ausdrücke kennen lernen werden, wollen wir mit $2\mu_1$ bezeichnen, während wir

$$
\tag{21}
\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} = 2\mu_2;\ \frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} = 2\mu_3;\ \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} = 2\mu
$$

setzen.

Digitized by Google

Wenn wir nun durch Integration zu der logarithmisch Abgeleiteten zurückkehren, so erhalten wir ausser dem Gliede Kz ein unbekanntes konstantes Glied. Nun ist für die drei geraden Funktionen die logarithmisch Abgeleitete ungerade und ohne singulären Punkt in $z=0$; wir brauchen dann nur $z=0$ zu setzen um zu erkennen, dass bei der Integration keinerlei Konstante hinzuzufügen ist. Dasselbe gilt für $\theta_1(z)$, wenn wir von der logarithmisch Abgeleiteten z^{-1} subtrahieren und dadurch $z=0$ zu einem regulären Punkt machen.

Bei der folgenden Integration, durch welche wir zur Produktentwickelung übergehen, wird wieder eine Konstante eingeführt, aber diese fällt fort, wenn wir die Funktion durch ihren Wert für $z=0$ dividieren. Wir dürfen jedoch bei θ_1 nicht in der Funktion selbst $z=0$ setzen, sondern erst nachdem sie durch z dividiert ist; wir erhalten dadurch $\theta_1'(0)$.

Wir erhalten also, wenn

$$\text{(22)} \qquad \Pi = \Pi\left(1-\frac{z}{a}\right)e^{\frac{z}{a}+\frac{z^2}{2a^2}},$$

wo das Produkt sich über alle Nullpunkte erstreckt, für θ_1 jedoch mit Ausnahme von $z=0$,

$$\text{(23)} \qquad \begin{gathered} \theta_3(z)=\theta_3(0)e^{\mu_3 z^2}\Pi;\ \theta(z)=\theta(0)e^{\mu z^2}\Pi; \\ \theta_2(z)=\theta_2(0)e^{\mu_2 z^2}\Pi;\ \theta_1(z)=\theta_1'(0)e^{\mu_1 z^2}z\Pi. \end{gathered}$$

39. Die ∞^2 Faktoren, die hier in den Produkten vorkommen, lassen sich zu einer einfachen Unendlichkeit vereinigen; wir haben nämlich identisch

$$1-\frac{z}{a+m\omega_1+n\omega_2}=\left(1-\frac{z-a-n\omega_2}{m\omega_1}\right):\left(1+\frac{a+n\omega_2}{m\omega_1}\right),$$

ein Ausdruck, der jedoch für $m=0$ die Form

$$\pi\cdot\frac{z-a-n\omega_2}{\omega_1}:\left(-\pi\frac{a+n\omega_2}{\omega_1}\right)$$

erhält.

Wir lassen hier n konstant sein, geben aber m alle ganzen Werte und multiplicieren; dann wird das Produkt

Digitized by Google

$$-\sin\frac{\pi(z-a-n\omega_2)}{\omega_1} : \sin\pi\frac{a+n\omega_2}{\omega_1}.$$

Nun sollten wir n alle ganzen Werte erteilen und multiplicieren. Indessen wollen wir hier diese Entwickelung nicht weiter verfolgen, da sie erst nach beschwerlichen Umformungen zu einer bequemen Form führt, sondern wollen diese direkt mit Hülfe einer merkwürdigen Formel von *Cauchy* ableiten.

40. Wir setzen

$$\begin{aligned} F(z) &= (1+qz)(1+qz^{-1})(1+q^3z)(1+q^3z^{-1})\dots(1+q^{2n+1}z^{-1}) \\ &= A_0 + A_1(z+z^{-1}) + A_2(z^2+z^{-2}) + \dots + A_{n+1}(z^{n+1}+z^{-n-1}). \end{aligned}$$

Setzen wir q^2z statt z, so erhalten wir im Produkte dieselben Faktoren mit Ausnahme des ersten und letzten, während dagegen die Faktoren $1+q^{-1}z^{-1}$ und $1+q^{2n+3}z$ hinzukommen; man hat deshalb identisch

$$(qz+q^{2n+2})F(q^2z) = (1+q^{2n+3}z)F(z).$$

Wenn wir dies auf die Reihe anwenden, so erhalten wir durch Vergleichung der Koefficienten, die zu Potenzen von z mit demselben positiven Exponenten gehören,

$$\begin{aligned} &A_0q + A_1q^{2n+4} = A_0q^{2n+3} + A_1; \\ &A_1q^3 + A_2q^{2n+6} = A_1q^{2n+3} + A_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &A_{n-1}q^{2n-1} + A_nq^{4n+2} = A_{n-1}q^{2n+3} + A_n; \\ &A_nq^{2n+1} + A_{n+1}q^{4n+4} = A_nq^{2n+3} + A_{n+1}; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &A_0q(1-q^{2n+2}) = A_1(1-q^{2n+4}); \\ &A_1q^3(1-q^{2n}) = A_2(1-q^{2n+6}); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &A_{n-1}q^{2n-1}(1-q^4) = A_n(1-q^{4n+2}); \\ &A_nq^{2n+1}(1-q^2) = A_{n+1}(1-q^{4n+4}); \\ &A_{n+1} = q^{1+3+5+\dots+2n+1} = q^{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Für $n=\infty$ und $|q|<1$ sind das Produkt und die Reihe unbedingt konvergent, und wir erhalten, wenn wir

Digitized by Google

$$(24) \qquad Q = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots$$

setzen,

$$A_0 = Q^{-1};\ A_1 = qA_0;\ A_2 = q^3 A_1 = q^4 A_0; \ldots A_n = q^{n^2} A_0$$

und dadurch, wenn die Faktoren in $F(z)$ zu je zweien zusammengezogen werden,

$$\begin{aligned} &Q[1+q(z+z^{-1})+q^2][1+q^3(z+z^{-1})+q^6][1+q^5(z+z^{-1})+q^{10}]\ldots \\ (25) \qquad &= 1+q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})+q^9(z^3+z^{-3})+\ldots \end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Identität ist also nur eingeschränckt durch die Bedingung $|q|<1$.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn wir q die gewöhnliche Bedeutung geben ((1)).

Setzen wir $e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}}$ für z, also $2\cos n\alpha$ für $z^n + z^{-n}$, so wird die Reihe in (25) eben $\theta_3(z)$, und wir erhalten dadurch die Zerlegung dieser Funktion in eine einfache Unendlichkeit von Faktoren. Daraus wird dann wieder durch Vertauschung von q mit $-q$ der Ausdruck für $\theta(z)$ gebildet. Um die beiden übrigen Funktionen zu zerlegen, betrachten wir die einzelnen Faktoren in $\theta_3(z)$ und setzen $z+\frac{1}{2}\omega_2$ für z; dadurch geht der Faktor

$$1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}}$$

über in

$$1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}+\pi i\omega} = 1+q^{2n+2}e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}},$$

während sich aus dem entsprechenden Faktor

$$1+q^{2n+1}e^{\frac{-2\pi i z}{\omega_1}-\pi i\omega} = 1+q^{2n}e^{\frac{-2\pi i z}{\omega_1}}$$

ergiebt.

Wenn wir den letzten Faktor für $n=0$ ausnehmen, so lassen die übrigen sich paarweise in Ausdrücke von der Form

$$1+2q^{2n}\cos\alpha+q^{4n}$$

zusammenziehen.

Digitized by Google

Nun ist nach der Definition

$$\theta_2(z) = q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega_1}} \theta_3(z + \tfrac{1}{2}\omega_2),$$

wo der exponentielle Faktor, multipliciert mit demjenigen, den wir oben für $n = 0$ erhielten, $2 \cos \frac{1}{2} \alpha$ ergiebt. Wir haben also $\theta_2(z)$ in Faktoren zerlegt. Aus $\theta_2(z)$ leitet man $\theta_1(z)$ dadurch ab, dass man $z + \frac{1}{2}\omega_1$ an die Stelle von z setzt.

Man findet in dieser Weise

$$(26) \begin{cases} \theta_3(z) = Q(1+2q\cos\alpha+q^2)(1+2q^3\cos\alpha + q^6)\dots \\ \theta(z) = Q(1-2q\cos\alpha+q^2)(1-2q^3\cos\alpha + q^6)\dots \\ \theta_2(z) = Q\cdot 2q^{\frac{1}{4}} \cos\frac{\alpha}{2}(1+2q^2\cos\alpha + q^4)(1+2q^4\cos\alpha+q^8)\dots \\ \theta_1(z) = Q\cdot 2q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\alpha}{2}(1-2q^2\cos\alpha + q^4)(1-2q^4\cos\alpha+q^8)\dots \end{cases}$$

Hieraus erhält man wieder für $z = 0$, also $\sin\alpha = 0$,

$$(27) \quad \begin{aligned} &\theta_3(0) = Q\Pi(1+q^{2n+1})^2;\ \theta(0) = Q\Pi(1-q^{2n+1})^2; \\ &\theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}} Q\Pi(1+q^{2n})^2;\ \theta_1(0) = 0. \end{aligned}$$

KAPITEL IV.

DIE ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN.

DIE FUNKTIONEN λ, μ, ν.

41. Aus den θ-Funktionen werden drei doppelperiodische Funktionen $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ gebildet, die durch hinzugefügte konstante Faktoren in der Weise näher bestimmt werden, dass

$$(1) \quad \lambda(\tfrac{1}{2}\omega_1) = 1;\ \mu(0) = 1;\ \nu(0) = 1.$$

Setzen wir

$$(2) \quad \theta_2(0):\theta_3(0) = \sqrt{k};\ \theta(0):\theta_3(0) = \sqrt{k_1},$$

so werden die Funktionen bestimmt durch

$$(3) \quad \lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)};\ \mu(z) = \sqrt{\frac{k_1}{k}}\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)};\ \nu(z) = \sqrt{k_1}\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)}.$$

Digitized by Google

Durch Benutzung der Eigenschaften der θ-Funktionen erhält man nun:

$\lambda(z)$. Die Funktion ist ungerade mit den Perioden $2\omega_1$ und ω_2; sie ist von zweiter Ordnung, denn sie hat Nullpunkte in 0 und ω_1, Pole in $\frac{1}{2}\omega_2$, und $\frac{1}{2}\omega_2 + \omega_1$.

$\mu(z)$. Die Funktion ist gerade mit den Perioden $2\omega_1$ und $\omega_1 + \omega_2$; sie ist von zweiter Ordnung mit Nullpunkten in $\frac{1}{2}\omega_1$ und $\frac{3}{2}\omega_1$, und Polen in $\frac{1}{2}\omega_2$ und $\frac{1}{2}\omega_2 + \omega_1$.

$\nu(z)$. Die Funktion ist gerade mit den Perioden ω_1 und $2\omega_2$; sie ist von zweiter Ordning mit Nullpunkten in $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ und $\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{3}{2}\omega_2$, und Polen in $\frac{1}{2}\omega_2$ und $\frac{3}{2}\omega_2$.

42. Wir erhalten nun ferner:

$$\lambda\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_2(z)}{\theta_3(z)} = \frac{\mu(z)}{\nu(z)};\ \lambda\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)} = \frac{1}{k\lambda(z)};$$

$$\lambda\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_3(z)}{\theta_2(z)} = \frac{1}{k}\frac{\nu(z)}{\mu(z)};\ \lambda\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

$$\mu\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{k_1}{k}}\frac{\theta_1(z)}{\theta_3(z)} = -k_1\frac{\lambda(z)}{\nu(z)};\ \mu\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right) = -i\sqrt{\frac{k_1}{k}}\frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)} = \frac{-i}{k}\frac{\nu(z)}{\lambda(z)}.$$

$$\mu\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = -i\sqrt{\frac{k_1}{k}}\frac{\theta(z)}{\theta_2(z)} = -\frac{ik_1}{k}\frac{1}{\mu(z)};\ \mu\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} = -\frac{ik_1}{k}.$$

$$\nu\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = \sqrt{k_1}\frac{\theta(z)}{\theta_3(z)} = k_1\frac{1}{\nu(z)};\ \nu\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right) = -i\sqrt{k_1}\frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)} = -i\frac{\mu(z)}{\lambda(z)};$$

$$\nu\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = i\sqrt{k_1}\frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)} = ik_1\frac{\lambda(z)}{\mu(z)};\ \nu\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = k_1.$$

Die Konstanten k und k_1 sind nur abhängig von den Werten der θ-Funktionen für $z = 0$, und diese hängen nach 36 und 37 nur von q ab, einer Grösse, die wieder nur vom Periodenverhältnis abhängig ist.

43. Die drei Funktionen $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ wechseln alle das Vorzeichen oder bleiben unverändert, wenn z die Zunahme ω_1 oder ω_2 erfährt, und ihre Quadrate haben also das Periodenparallelogramm (ω_1, ω_2). In diesem erhalten sie nur einen Pol, $\frac{1}{2}\omega_2$, in dem sie aber alle zweimal unendlich werden. Da die Summe der Residuen in einem Periodenparallelogramm Null ist, so kann in der Reihenentwickelung der Funktionen vom

Digitized by Google

Pole aus kein Glied mit dem Exponenten -1 vorkommen, so dass das einzige Glied mit negativen Exponenten die Form

$$\frac{a}{(z-\frac{1}{2}\omega_2)^2}$$

erhält.

Eliminieren wir dieses Glied, indem wir zwei von den Funktionen mit passenden Konstanten multiplicieren und addieren, so erhalten wir eine doppelperiodische Funktion, die im Pole nicht unendlich werden kann, und deshalb auch nicht im ganzen Periodenparallelogramm; sie muss deshalb eine Konstante sein, und es existiert also zwischen zwei beliebigen von den drei Funktionen eine lineare Relation mit konstanten Koefficienten. Wir haben also

$$\alpha\lambda^2(z)+\beta\mu^2(z)=1;\quad \alpha_1\lambda^2(z)+\beta_1\nu^2(z)=1;$$

aus $\lambda(0)=0$; $\mu(0)=1$; $\nu(0)=1$ ergiebt sich $\beta=\beta_1=1$; aus $\mu(\frac{1}{2}\omega_1)=0$ und $\lambda(\frac{1}{2}\omega_1)=1$ ergiebt sich ferner $\alpha=1$, und aus $\lambda(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2))=k^{-1}$; $\nu(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2))=0$ endlich $\alpha_1=k^2$; wir erhalten also

$$\text{(3)}\qquad \lambda^2(z)+\mu^2(z)=1;\quad k^2\lambda^2(z)+\nu^2(z)=1;\quad k^2\mu^2(z)-\nu^2(z)=k^2-1,$$

woraus wieder, da $\lambda(\frac{1}{2}\omega_1)=1$; $\nu(\frac{1}{2}\omega_1)=k_1$,

$$\text{(4)}\qquad k^2+k_1^2=1.$$

Drücken wir hier k und k_1 durch q aus, so erhalten wir die merkwürdige Identität

$$\text{(5)}\quad (1-2q+2q^4-2q^9-\ldots)^4+(2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+\ldots)^4=(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^4,$$

die sich benutzen lässt, um verschiedene Sätze in der Zahlentheorie zu beweisen (Zerlegung einer Zahl in eine Summe von vier Quadraten).

44. Wir wollen nun Produkte aus je zwei von unseren drei Funktionen bilden und hieraus wichtige Resultate ableiten.

$\mu(z)\nu(z)$. Die Funktion hat die Perioden $2\omega_1$ und ω_2, also dieselben wie $\lambda(z)$. Sie wird zweimal unendlich in den Punkten $\frac{1}{2}\omega_2$ und $\frac{1}{2}\omega_2+\omega_1$, hat also dieselben Pole wie $\lambda'(z)$; sie hat

Digitized by Google

Nullpunkte in $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$, $\frac{3}{2}\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2$, $\frac{1}{2}\omega_1$ und $\frac{3}{2}\omega_1$; wir können indessen zeigen, dass $\lambda'(z)$ genau dieselben Nullpunkte hat.

Man hat nämlich

$$\lambda(z+\omega_1) = -\lambda(z);\ \lambda'(z+\omega_1) = -\lambda'(z),$$

also, da $\lambda'(z)$ eine gerade Funktion mit der Periode $2\omega_1$ ist,

$$\lambda'(z+\omega_1) = \lambda'(z-\omega_1) = \lambda'(\omega_1 - z) = -\lambda'(z),$$

woraus hervorgeht, dass der Punkt $\frac{1}{2}\omega_1$, der kein Pol ist, ein Nullpunkt sein muss; dasselbe muss dann von $\frac{3}{2}\omega_1$ gelten. Hierdurch werden leicht die beiden anderen bestimmt, da ihre Differenz ω_1 ist, und ihre Summe, abgesehen von Perioden, aus den gefundenen Nullpunkten und Polen bestimmt wird.

Da die beiden Funktionen dasselbe Periodenparallelogramm und dieselben Nullpunkte und Pole haben, so ist ihr Verhältnis eine Konstante; behandeln wir nun die übrigen Produkte aus zwei von den Funktionen auf dieselbe Weise, so erhalten wir

$$(6)\qquad \lambda'(z) = g\mu(z)\nu(z);\ \mu'(z) = g_1\nu(z)\lambda(z);\ \nu'(z) = g_2\mu(z)\lambda(z).$$

Um die Konstanten zu bestimmen, bilden wir das Verhältnis $\lambda'(z):\mu'(z)$, teils aus den beiden ersten Gleichungen, teils durch Differentiation der ersten Gleichung (3); dadurch finden wir $g_1 = -g$. Auf dieselbe Weise benutzen wir die erste und dritte Gleichung und die zweite Gleichung (3); dadurch erhalten wir $g_2 = -k^2 g$. Endlich erhalten wir aus der ersten Gleichung $g = \lambda'(0)$; aber aus der Definition von $\lambda(z)$ ergiebt sich, da $\theta_1(0) = 0$,

$$\lambda'(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_1'(0)}{\theta(0)},$$

also durch Benutzung der Reihe für $\theta_1(z)$,

$$(7)\qquad g = \frac{2\pi}{\omega_1\sqrt{k}}\frac{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}.$$

k heisst *der Modulus*, k_1 *der komplementäre Modulus*, g *der Multiplicator*. Die Formel für g zeigt, dass $g\omega_1$ allein vom Periodenverhältnis abhängig ist.

Digitized by Google

Aus den Gleichungen (3) und (6) finden wir nun, wenn wir die untere Grenze der Integrale durch (1) bestimmen,

$$(8)\quad \frac{d\lambda}{dz} = g\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)};\quad gz = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}};$$

$$(9)\quad \frac{d\mu}{dz} = -gk_1\sqrt{(1-\mu^2)\left(1+\frac{k^2}{k_1^2}\mu^2\right)};\quad -gk_1 z = \int_1^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)\left(1+\frac{k^2}{k_1^2}\mu^2\right)}};$$

$$(10)\quad \frac{d\nu}{dz} = igk_1\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{k_1^2}\nu^2\right)};\quad igk_1 z = \int_1^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{k_1^2}\nu^2\right)}};$$

Jedem Werte von λ, μ, ν entsprechen in dem betreffenden Parallelogramm zwei Punkte; in diesen hat die Abgeleitete verschiedene Werte, entsprechend den beiden Werten der Wurzelgrösse; für $\lambda = 0$ erhält man beispielsweise $\lambda' = \pm g$; da $\mu(0) = \nu(0) = 1$, so zeigt die erste Gleichung (6), dass das obere Vorzeichen $z = 0$, das untere also $z = \omega_1$ entspricht.

Unsere Resultate zeigen uns, dass unsere drei doppelperiodischen Funktionen die umgekehrten Funktionen von elliptischen Integralen erster Art sind; wir haben sie unter *Legendres* Normalform dargestellt erhalten, wobei jedoch ein neuer Parameter g hinzugekommen ist; wo es notwendig ist auf diesen besonders aufmerksam zu machen, wollen wir die Bezeichung $\lambda(z, g, k)$ u. s. w. benutzen, so dass $\sin \operatorname{am} z = \lambda(z, 1, k)$, oder kürzer $= \lambda(z, k)$. Für die drei Funktionen braucht man auch die Bezeichnungen *sn*, *cn*, *dn*.

Dass die Funktionen hier mit zwei Parametern auftreten, ist eine notwendige Folge des Umstandes, dass sie durch zwei willkürliche, von einander unabhängige Perioden bestimmt sind.

45. Durch die Methode, durch die wir oben Relationen zwischen den Quadraten der drei Funktionen abgeleitet haben, lassen sich eine Menge anderer Relationen zwischen doppelperiodischen Funktionen ableiten. Namentlich kann man die Quadrate der drei Funktionen betrachten oder deren reciproke

Digitized by Google

Werte, oder ihr gegenseitiges Verhältnis, und diese mit den doppelperiodischen Funktionen vergleichen, die gebildet werden von den zweimal Abgeleiteten der Logarithmen der θ-Funktionen. Diese findet man in dem oben (S. 270) angeführten Werke von *Briot* und *Bouquet.* Hier wollen wir uns damit begnügen, die Methode an ein paar Beispielen zu zeigen.

Die erwähnten doppelperiodischen Funktionen haben die Form

$$-\sum\left(\frac{1}{(z-a)^2}-\frac{1}{a^2}\right)+K, \tag{11}$$

wo a einen Nullpunkt der entsprechenden θ-Funktion darstellt. Die Funktion hat die Perioden ω_1 und ω_2 und wird in einem Parallelogramm zweimal unendlich in dem darin liegenden Punkte a. Dasselbe gilt von einer der obengenannten Funktionen, wenn sie zum Nenner das Quadrat derjenigen θ-Funktion hat, deren Nullpunkt a ist, und dann muss zwischen den beiden Funktionen eine lineare Relation mit konstanten Koefficienten existieren.

Wir erhalten beispielsweise, wenn wir $\lambda^{-2}(z)$ und $\theta_1(z)$ betrachten,

$$A\lambda^{-2}(z)=B-D_z^2\,l\,\theta_1(z).$$

Der Doppelpol liegt im Punkte 0; wir wollen die ersten Glieder der von diesem Punkt ausgehenden Reihenentwickelung bestimmen.

Wir haben $\lambda(0)=0$, und finden mit Hülfe von (6)

$$\lambda'(0)=g;\ \lambda''(0)=0;\ \lambda'''(0)=-g^3(1+k^2)\ldots.$$

Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens kommt nur ein Glied mit negativem Exponenten vor, nämlich dasjenige, das vom Faktor z in $\theta_1(z)$ herrührt; da ferner Σ für $z=0$ fortfällt, so erhalten wir

$$Ag^{-2}(z^{-2}+\tfrac{1}{3}(1+k^2)g^2+\ldots)=z^{-2}+B-K+\ldots;$$

daraus ergiebt sich $A=g^2$; $B-K=\frac{1}{3}(1+k^2)g^2$.

Setzen wir $z+\frac{1}{2}\omega_2$ für z, so erhalten wir mit Benutzung von 42

Digitized by Google

$$g^2 k^2 \lambda^2(z) = B - D_z^2 l\theta(z);$$

für $z=0$ ergiebt sich daraus $B = \theta''(0):\theta(0) = 2\mu$, und daraus wieder

$$K = 2\mu_1 = 2\mu - \tfrac{1}{3}(1+k^2)g^2. \tag{12}$$

Hier erhielten wir μ_1 ausgedrückt durch μ; ähnliche Ausdrücke können wir für μ_2 und μ_3 finden. Wir haben nämlich

$$D_z^2 l\theta_2(z) - D_z^2 l\theta(z) = D_z^2 l\mu(z) = -g D_z(\lambda(z)\nu(z):\mu(z)),$$

oder, da $\theta_2'(0) = \theta'(0) = 0$; $\lambda(0) = 0$,

$$2\mu_2 - 2\mu = -g\lambda'(0)\nu(0):\mu(0) = -g^2, \tag{13}$$

und auf dieselbe Weise

$$2\mu_3 - 2\mu = -k^2 g^2. \tag{14}$$

Setzen wir $g=1$, und führen wir in das Integral (8) eine neue Variable p ein, indem wir

$$\lambda^{-2} - \tfrac{1}{3}(1+k^2) = p \tag{15}$$

setzen, so nimmt das Integral die von *Weierstrass* angegebene Normalform (S. 108) an; p ist also seine umgekehrte Funktion; wir sehen also, dass *Weierstrass'* p-Funktion eine gerade Funktion zweiter Ordnung ist, deren Pole im Punkte 0 zusammenfallen, und die kein konstantes Glied in ihrer Reihenentwickelung hat.

46. Aus den Produktentwickelungen für die θ-Funktionen kan man sofort solche Entwickelungen für die elliptischen Funktionen, sowie für die Moduln und Multiplikatoren bilden; so erhalten wir aus den Ausdrücken (2) und (26)

$$\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}}\Pi\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n+1}}\right)^2; \quad \sqrt{k_1} = \Pi\left(\frac{1-q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}\right)^2. \tag{16}$$

Ferner haben wir nach der ersten Gleichung (6)

$$g = \lambda'(0) = \theta_1'(0):(\theta(0)\sqrt{k}) = [\theta_1(z):z]_{z=0}:(\theta(0)\sqrt{k}),$$

Digitized by Google

oder, wenn wir die Produktentwickelung für $\theta_1(z)$ benutzen und beachten, dass $\sin \frac{1}{2} \alpha$ nach Division mit z für $z = 0$ zu $\pi : \omega_1$ wird,

$$\theta'_1(0) = 2\, Q q^{\frac{1}{4}} \frac{\pi}{\omega_1} (1-q^2)^2 (1-q^4)^2 (1-q^6)^2 \ldots,$$

also mit Benutzung der Produktentwickelung für $\theta(0)$ und für $\sqrt{k}$

$$(17)\quad \sqrt{\frac{g\omega_1}{\pi}} = \frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)\ldots(1-q)(1-q^3)\ldots} = \theta_3(0),$$

und daraus

$$(18)\quad \theta_2(0) = \sqrt{\frac{gk\omega_1}{\pi}};\ \theta(0) = \sqrt{\frac{gk_1\omega_1}{\pi}}.$$

ENTWICKELUNG DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN IN REIHEN.

47. Für die Entwickelung der elliptischen Funktionen in Potenzreihen können wir die Formeln (6) benutzen; dabei wollen wir $g = 1$ setzen, denn in den dadurch gebildeten Reihen brauchen wir nur gz für z zu setzen, wenn wir zu der allgemeinen Form übergehen wollen. Wir erhalten nun

$$\lambda' = \mu\nu;\ \lambda'' = \lambda(2k^2\lambda^2 - k^2 - 1);\ \lambda''' = \lambda'(6k^2\lambda^2 - k^2 - 1);$$
$$\lambda^{IV} = \lambda(24k^4\lambda^4 - 20k^2(1+k^2)\lambda^2 + k^4 + 14k^2 + 1) \text{ u. s. w.};$$

und daraus

$$\lambda'(0) = 1;\ \lambda''(0) = 0;\ \lambda'''(0) = -(k^2+1);\ \lambda^{IV}(0) = 0 \text{ u. s. w.}$$

Man erkennt hier leicht folgende Eigenschaften der abgeleiteten Funktionen.

$\lambda^{(n)}$ ist teilbar durch λ für ein gerades n, durch λ' für ein ungerades n. Die Reihe erhält also nur Glieder mit ungeraden Exponenten.

Der Faktor, mit dem λ oder λ' multipliciert ist, ist für ein gerades n vom Grade n, für das nächst grössere n von demselben Grade und mit demselben konstanten Gliede.

Auf ähnliche Weise können wir die Reihen für die beiden anderen Funktionen bilden und erhalten demnach

Digitized by Google

(19) $$\lambda(z) = z - a_3 \frac{z^3}{3!} + a_5 \frac{z^5}{5!} - a_7 \frac{z^7}{7!} + \ldots;$$

$$a_3 = k^2 + 1;\ a_5 = k^4 + 14k^2 + 1;\ a_7 = (k^2+1)(k^4 + 134k^2 + 1)\ldots.$$

(20) $$\mu(z) = 1 - b_2 \frac{z^2}{2!} + b_4 \frac{z^4}{4!} - b_6 \frac{z^6}{6!} + \ldots;$$

$$b_2 = 1;\ b_4 = (2k)^2 + 1;\ b_6 = (2k)^4 + 11(2k)^2 + 1.$$

(21) $$\nu(z) = 1 - c_2 \frac{z^2}{2!} + c_4 \frac{z^4}{4!} - c_6 \frac{z_6}{6!} + \ldots;$$

$$c_2 = k^2;\ c_4 = k^4 + 4k^2;\ c_6 = k^2(k^4 + 44k^2 + 16).$$

Man kann auch einen anderen Weg einschlagen; wie man sieht genügen alle drei Funktionen der Differentialgleichung

$$\varphi'''\varphi - 3\varphi'\varphi'' = 2\alpha^2\varphi\varphi',$$

wo α^2 in den drei Fällen beziehungsweise k^2+1, $1-2k^2$ und k^2-2 bedeutet; man kann also in diese Gleichung für φ Reihen der oben angegebenen Form einzetzen und die Methode der unbestimmten Koefficienten anwenden; diese führt zu Rekursionsformeln, die sich zur successiven Berechnung der Koefficienten anwenden lassen. Einer der Koefficienten lässt sich auf diesem Wege nicht bestimmen, ist aber schon oben gefunden worden. Man sieht, dass zu der Differentialgleichung als partikuläres Integral dass vollständige Integral von $\varphi'' + \alpha^2\varphi = 0$ gehört, aber diese Eigenschaft scheint keinerlei Erleichterung mit sich zu bringen.

48. Wir wollen nun zeigen, wie die drei Funktionen sich in trigonometrischen Reihen entwickeln lassen. Wir haben in 76 gezeigt, das eine periodische Funktion, die holomorph in der ganzen Ebene ist, sich in einer solchen, für die ganze Ebene geltenden Reihe entwickeln lässt; auf ähnliche Weise zeigt man, dass der Satz, wenn die Funktion Pole hat, für eine von Parallelen begrenzte Zone gilt, in der die Funktion holomorph ist.

$\lambda(z)$ hat die Periode $2\omega_1$, lässt sich also nach dem erwähnten Satze in einer nach beiden Seiten unendliche Reihe

$$\lambda(z) = \sum A_m e^{\frac{m\pi i z}{\omega_1}}$$

Digitized by Google

entwickeln, die konvergent ist in einer Zone, die von zwei zu ω_1 parallelen Geraden begrenzt wird; diese liegen zu beiden Seiten des Punktes Null und enthalten jede eine von zwei Nachbarreihen der Pole der Funktion, so dass keiner von diesen Polen innerhalb der Zone vorkommt. Die Linie AB, die $-\frac{1}{2}\omega_1$ mit $+\frac{1}{2}\omega_1$ verbindet, liegt in dieser Zone.

Um die Koefficienten zu bestimmen, multiplicieren wir mit $e^{\frac{-m\pi i z}{\omega_1}} dz$ und integrieren von A bis C, wo AC gleich $2\omega_1$; dabei fallen alle Glieder fort, ausgenommen das eine, das den Koefficienten A_m hat; wir erhalten also

$$2\omega_1 A_m = \int \lambda(z) e^{\frac{-m\pi i z}{\omega_1}} dz,$$

wo die Integration von A bis C geht; zerlegt man das Integral in zwei Teile, den einen von A nach B, den anderen von B nach C, so sieht man leicht, dass diese Teile gleich gross sind, wenn m eine ungerade Zahl ist, dagegen gleich gross mit entgegengesetzten Vorzeichen, wenn m gerade ist; ferner zeigt die Vertauschung von m mit $-m$ und von z mit $-z$, dass A_m das Zeichen mit m wechselt; wir brauchen daher nur positive m zu betrachten.

Wir haben also

$$A_{2m} = 0; \quad \omega_1 A_{2m-1} = \int \lambda(z) e^{-(2m-1)\frac{\pi i z}{\omega_1}} dz,$$

wo der Integrationsweg von A nach B führt.

Nun wollen wir ein Parallelogramm betrachten, von dem zwei Eckpunkte A und B sind, während man die beiden anderen dadurch findet, dass man von diesen $n\omega_2$ subtrahiert, wo n positiv und unendlich gross ist; wir wollen das Integral längs dem Umfange dieses Parallelogramms führen.

In homologen Punkten der unendlich langen Seiten sind beide Faktoren unter dem Integralzeichen paarweise gleich gross, aber mit entgegengesetzten Zeichen; diese Seiten tragen also zum Werte des Integrals nichts bei; dasselbe gilt von der unendlich fernen Seite, da der exponentielle Faktor auf dieser Seite Null ist. Wir können also das Integral, statt von A nach

Digitized by Google

B, in negativer Richtung längs dem Umfange des Parallelogramms nehmen. Dadurch erhalten wir

$$\omega_1 A_{2m-1} = -2\pi i \Sigma\varrho,$$

wo $\Sigma\varrho$ die Summe der Residuen im Parallelogramm bedeutet.

Die Pole im Parallelogramm sind die Punkte $-(n-\frac{1}{2})\omega_2$, wo $n=1,2,3\ldots$; bezeichnen wir einen von diesen Punkten mit α, so wird das Residuum für $\lambda(z)$ in diesem Punkte der Wert von $(z-\alpha)\lambda(z)$ für $z=\alpha$, oder der Wert von $z_1\lambda(z_1+\alpha)$ für $z_1=0$; nun ist $\lambda(z_1+\alpha)=\lambda(z_1+\frac{1}{2}\omega_2)=\frac{1}{k\lambda(z_1)}$; multiplicieren wir hier mit z_1 und setzen $z_1=0$, so erhalten wir das Resultat $\frac{1}{kg}$; wir erhalten also das Residuum

$$\frac{1}{kg}e^{\frac{1}{2}(2m-1)(2n-1)\pi i\omega} = \frac{1}{kg}q^{(m-\frac{1}{2})(2n-1)},$$

woraus hervorgeht, dass die Residuen eine Quotientenreihe bilden; führen wir die Summe von dieser ein, so erhalten wir

$$A_{2m-1} = -\frac{2\pi i}{gk\omega_1}\cdot\frac{q^{m-\frac{1}{2}}}{1-q^{2m-1}}. \tag{23}$$

Wenn wir nun die Glieder paarweise zusammenziehen und auf ähnliche Weise die Entwickelungen für $\mu(z)$ und $\nu(z)$ bilden, so erhalten wir

$$\lambda(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{gk\omega_1}\left(\frac{1}{1-q}\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{q}{1-q^3}\sin\tfrac{3}{2}\alpha + \ldots + \frac{q^{m-1}}{1-q^{2m-1}}\sin\tfrac{2m-1}{2}\alpha + \ldots\right) \tag{24}$$

$$\mu(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{gk\omega_1}\left(\frac{1}{1+q}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{q}{1+q^3}\cos\tfrac{3}{2}\alpha + \ldots + \frac{q^{m-1}}{1+q^{2m-1}}\cos\tfrac{2m-1}{2}\alpha + \ldots\right) \tag{25}$$

$$\nu(z) = \frac{\pi}{g\omega_1}\left(1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos\alpha + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 2\alpha + \ldots + \frac{4q^m}{1+q^{2m}}\cos m\alpha + \ldots\right). \tag{26}$$

Digitized by Google

49. Wir wollen noch ein System von Reihenentwickelungen für die drei Funktionen bilden, wobei wir jedoch wie oben die Entwickelung nur für $\lambda(z)$ durchführen wollen. Hierzu bedienen wir uns desselben Parallelogramms, das wir für die Bildung der trigonometrischen Reihe benutzten, jedoch mit dem Unterschied, dass wir das Parallelogramm sich nun nach beiden Seiten bis ins Unendliche erstrecken lassen, so dass es die Pole $(n+\frac{1}{2})\omega_2$ für alle ganzen Werte von n enthält. Wir betrachten nun das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\lambda(t)\,dt}{\sin\frac{\pi}{\omega_1}(t-z)},$$

wo z ein beliebiger Punkt im Parallelogramm ist, und integrieren in positiver Richtung längs dessen Umfang. Der Wert des Integrals ist dann gleich der Summe der Residuen im Parallelogramm. Die Funktion unter dem Integralzeichen hat die Periode ω_1, und ihr Nenner hat unendlich grossen Modulus auf den beiden unendlich fernen Seiten. Daraus folgt, dass der Wert des Integrals und deshalb die Summe der Residuen Null ist. Diese rühren teils her von den Polen des Zählers, teils von dem einen Nullpunkt z, den der Nenner im Parallelogramm hat; von diesem erhalten wir das Residuum $\frac{\omega_1}{\pi}\lambda(z)$. Vom Pol $(n+\frac{1}{2})\omega_2$ erhalten wir

$$-\frac{1}{kg\sin\frac{\pi}{\omega_1}(z-(n+\frac{1}{2})\omega_2)};$$

wir haben also

$$\lambda(z)=\frac{\pi}{gk\omega_1}\sum\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega_1}(z-(n+\frac{1}{2})\omega_2)},$$

wo n alle Werte annehmen soll von $-\infty$ bis $+\infty$. Ziehen wir die Glieder zusammen, die Polen entsprechen und gleich gross sind mit entgegengesetzten Zeichen, so erhalten wir

$$(27)\qquad \lambda(z)=\frac{4\pi\sqrt{q}}{gkw_1}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sum_1^\infty\frac{q^{n-1}(1+q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos\alpha+q^{4n-2}}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$(28)\qquad \mu(z)=\frac{4\pi\sqrt{q}}{gk\omega_1}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}q^{n-1}(1-q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos\alpha+q^{4n-2}}.$$

Für $\nu(z)$ muss man, um das Integral zum Verschwinden zu bringen, im Nenner *tg* statt *sin* nehmen. Dadurch erhält man jedoch eine Reihe von Brüchen, die nicht konvergent ist. Dieser Schwierigkeit entgeht man, wenn man $\nu(0)-\nu(z)$ statt $\nu(z)$ betrachtet, und dadurch erhält man

$$(29)\qquad 1-\nu(z)=\frac{8\pi}{g\omega_1}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}q^{2n-1}\dfrac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}}{1-2q^{2n-1}\cos\alpha+q^{4n-2}}.$$

ADDITION DER ARGUMENTE.

50. Wir haben früher (S. 107) Formeln abgeleitet für die Addition elliptischer Integrale von *Legendres* Normalform und können hieraus leicht Formeln bilden für die Addition der Argumente der umgekehrten Funktion.

Dieselbe Aufgabe lässt sich für die beiden anderen elliptischen Funktionen auf dieselbe Weise lösen; wir wollen hier jedoch einen anderen Weg einschlagen.

Bedeutet t eine willkürliche Konstante, so wollen wir die Funktion

$$\lambda(z+t)+\lambda(z-t)$$

untersuchen.

Die Funktion hat die Perioden $2\omega_1$ und ω_2; sie ist von vierter Ordnung mit den Polen $\pm t+\frac{1}{2}\omega_2$ und $\pm t+\frac{1}{2}\omega_2+\omega_1$. Ihre Nullpunkte sind 0, ω_1, $\frac{1}{2}\omega_2$ und $\frac{1}{2}\omega_2+\omega_1$.

Die Funktion

$$\frac{\lambda(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}$$

hat dieselben Perioden und, da sie für $\lambda(z)=0$ und $\lambda(z)=\infty$ Null wird, auch dieselben Nullpunkte. Die Funktion wird unendlich, wenn

Digitized by Google

$$\lambda(z) = \pm \frac{1}{k\lambda(t)} = \pm \lambda(\tfrac{1}{2}\omega_2 + t);$$

man erkennt hieraus, dass die beiden Funktionen auch dieselben Pole haben und schliessen dann, dass ihr Verhältnis eine Konstante ist. Diese wird dadurch bestimmt, dass man die Abgeleitete bildet und $z=0$ setzt; dann erhält man ($g=1$)

$$\lambda(z+t) + \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(z)\lambda'(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Vertauscht man hierin z und t, so findet man

$$\lambda(z+t) - \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(t)\lambda'(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

wonach

$$\lambda(z \pm t) = \frac{\lambda(z)\lambda'(t) \pm \lambda(t)\lambda'(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \tag{30}$$

eine Gleichung, die mit derjenigen übereinstimmt, die sich aus der Formel auf S. 107 ableiten lässt.

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man ferner

$$\mu(z \pm t) = \frac{\mu(z)\mu(t) \mp \mu'(z)\mu'(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}. \tag{31}$$

$$\nu(z \pm t) = \frac{\nu(z)\nu(t) \mp k^{-2}\nu'(z)\nu'(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}. \tag{32}$$

51. Setzen wir in *Legendres* Integral $z = \sin\varphi$, so wird dieses umgeformt in

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{33}$$

und das Additionstheorem wird

$$F(\varphi) \pm F(\psi) = F(\mu),$$

wo

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} \pm \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

Digitized by Google

eine Gleichung, die sich auch in der Form

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi \pm \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu} \tag{34}$$

schreiben lässt.

Wir wollen zeigen, wie man für reelle Werte der Variablen durch einfache geometrische Betrachtungen zu dieser Form des Additionstheorems gelangen kann.

In einem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ABC wollen wir uns den rechten Winkel bei C denken, während der Winkel A unendlich klein ist; die Formel $tg\,b = tg\,c\cos A$ zeigt dann, dass der Unterschied zwischen b und c unendlich klein von zweiter Ordnung ist. Hieraus folgt, dass, wenn der Bogen AB eines grössten Kreises unendlich wenig bis in die Lage A_1B_1 bewegt wird, die Projektionen von AA_1 und BB_1 auf AB nur durch Grössen zweiter Ordnung von einander verschieden sind.

Nun sei ABC ein beliebiges sphärisches Dreieck; wir lassen die Seite a sich, mit Beibehaltung ihrer Länge unendlich wenig mit ihren Endpunkten auf den beiden anderen Seiten bewegen; diese erhalten dadurch die Zunahmen db und dc, und nach dem bewiesenen Satze ist $db\cos C + dc\cos B = 0$; ist nun $\sin B = k\sin b$, so erhält man hieraus

$$\frac{db}{\sqrt{1-k^2\sin^2 b}} + \frac{dc}{\sqrt{1-k^2\sin^2 c}} = 0,$$

eine Gleichung, deren Integral

$$F(b) + F(c) = F(a)$$

ist, da man für $c = 0$ haben muss $b = a$.

Die Gleichung hat indessen auch das Integral

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

liefert also das Additionstheorem.

MULTIPLIKATION UND DIVISION DES ARGUMENTS.

52. Durch wiederholte Anwendung der für die Addition der Argumente gefundenen Formel (30), sowie durch Benutzung

Digitized by Google

der Ausdrücke für die Abgeleiteten durch die erste Abgeleitete und die Funktion selbst (47), kann man nun, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, $\lambda(nz)$ rational durch $\lambda(z)$ und $\lambda'(z)$ ausdrücken, so zwar, dass der Ausdruck die Form

$$\lambda(nz) = A + B\lambda'(z) \tag{35}$$

hat, wo A und B rationale Funktionen von $\lambda(z)$ sind. Da $\lambda(nz)$ die Perioden $2\omega_1 : n$ und $\omega_2 : n$ hat, und die Gleichung zwischen $\lambda'(z)$ und $\lambda(z)$ vom zweiten Grade in der ersten ist, so folgt dies auch direkt aus dem in 28 bewiesenen Satze. Das Periodenparallelogramm, das zu $\lambda(z)$ gehört, enthält das zu $\lambda(nz)$ gehörige n^2 Male. *Einem* Werte von $\lambda(z)$ entsprechen in dem zugehörigen Parallelogramm zwei Werte von z und deshalb zwei Werte von $\lambda(nz)$, während *einem* Werte von $\lambda(nz)$ $2n^2$ Werte von $\lambda(z)$ entsprechen. Die Gleichung ist deshalb vom zweiten Grade in $\lambda(nz)$, und vom Grade $2n^2$ in $\lambda(z)$. Ist n ungerade, so werden die Grade auf die Hälfte reduciert, denn beide Funktionen bleiben unverändert, wenn man $\omega_1 - z$ für z setzt, und diese Transformation bildet zusammen mit der identischen Transformation eine Gruppe zweiter Ordnung (26).

Für die Funktionen $\mu(z)$ und $\nu(z)$ kann man ähnliche Betrachtungen anstellen. Die Gleichungen sind bei diesen immer von den Graden 1 und n^2.

Als Beispiel können wir die Gleichung $(n = 2)$

$$(1 - k^2\lambda^2(z))^2\lambda^2(2z) = 4\lambda^2(z)(1 - \lambda^2(z))(1 - k^2\lambda^2(z))$$

betrachten, die beziehungsweise von den Graden 2 und 8 ist; wir erkennen hieraus, dass $\lambda(\frac{1}{2}z)$, ausgedrückt durch $\lambda(z)$, 8 Werte hat; diese lassen sich durch Quadratwurzeln bestimmen, denn setzen wir

$$\sqrt{k}\lambda(2z) = y; \quad \sqrt{k}\lambda(z) = x,$$

so erhalten wir die reciproke Gleichung

$$y^2(x^2 - x^{-2})^2 - 4(x^2 + x^{-2}) + 4(k + k^{-1}) = 0.$$

53. Andere Zerlegungen des Arguments lassen sich auf den Fall zurückführen, wo der Divisor eine Primzahl ist; ist diese

Digitized by Google

eine ungerade Zahl p, so wird die Lösung durch eine Gleichung vom Grade p^2 bestimmt. *Abel* hat gezeigt, dass diese Gleichung sich durch Wurzelgrössen lösen lässt. Um das zu beweisen, wollen wir die Monodromiegruppe der Gleichung suchen.

Ist eine von den Wurzeln der Gleichung $\lambda\left(\frac{z}{p}\right)$, so lassen sie sich alle in der Form

$$\lambda\left(\frac{z+\alpha\cdot 2\omega_1+\beta\cdot\omega_2}{p}\right)$$

schreiben wo α und β die Werte $0, 1, 2, \ldots p-1$ haben; wir wollen sie durch $r_{\alpha,\beta}$ bezeichnen.

Nun wollen wir annehmen, dass $\lambda(z)$ einen geschlossenen Weg beschreibt; das kann dadurch geschehen, dass z eine Anzahl Perioden durchläuft, oder dadurch, dass z nach ω_1-z oder nach einem von den dazu homologen Punkten geht. Ist in dem ersten Falle die Anzahl der durchlaufenen Perioden m und n, so geht jede Wurzel $r_{\alpha,\beta}$ über in $r_{\alpha+m,\beta+n}$, wo für diese Indices ihre Reste für den Divisor p zu nehmen sind. Im zweiten Falle hat man

$$\lambda\left(\frac{\omega_1-z}{p}\right)=-\lambda\left(\frac{z-\omega_1}{p}\right)=\lambda\left(\frac{z-\omega_1}{p}+\omega_1\right)=\lambda\left(\frac{z+\frac{1}{2}(p-1)2\omega_1}{p}\right);$$

dieses Resultat stimmt überein mit demjenigen des vorhergehenden Falls, da $\frac{1}{2}(p-1)$ eine ganze Zahl ist.

Wir sehen also, dass, wenn $\lambda(z)$ einen beliebigen geschlossenen Weg durchläuft, alle Wurzeln so transformiert werden, dass jeder von den beiden Indices um bestimmte Zahlen vermehrt wird, so dass für alle Werte von α und β diese $\alpha+m$ und $\beta+n$ werden, wo m und n kleiner sind als p. Die hierdurch bestimmten Substitionen, deren Anzahl p^2 beträgt, bilden die Monodromiegruppe der Gleichung. Aus bekannten Sätzen der Substitutionstheorie folgt dann, dass die Gleichung sich auf *Abel*sche Gleichungen vom Grade p reducieren lässt, und diese lassen sich durch Wurzelgrössen lösen.

Digitized by Google

DIE INTEGRALE ZWEITER UND DRITTER ART.

54. Wir haben gesehen, dass die drei doppelperiodischen Funktionen die umgekehrten Funktionen von elliptischen Integralen erster Art sind, und wollen nun zeigen, dass die Integrale zweiter und dritter Art keine umgekehrten Funktionen haben können, die doppelperiodisch und eindeutig sind. Da die drei Integrale auf derselben *Riemann*schen Fläche genommen worden sind, so bestimmen dieselben Querschnitte ihre Periodicitätsmoduln, und sie erhalten deshalb jede zwei von solchen, und diese sind analog denjenigen, die zum Integral erster Art gehören.

Nun wird jedoch das Integral dritter Art logarithmisch unendlich in zwei Punkten; es erhält also einen dritten Periodicitätsmodul von der Form $2\pi i A$. Hieraus folgt dann sofort nach *Jacobis* Satz, dass seine umgekehrte Funktion unendlich viele Werte haben muss. Das Integral zweiter Art wird nicht logarithmisch unendlich und hat deshalb in Wirklichkeit nur zwei Periodicitätsmoduln, die bei der Abbildung ein Periodenparallelogramm bestimmen. Dieses muss jedoch einen Verzweigungspunkt enthalten; um das zu zeigen, nehmen wir am bequemsten das Integral

$$w = \int \frac{z^2\,dz}{\Delta(z, k)};$$

hier fallen die Werte der Funktion unter dem Integralzeichen zusammen für $z = 0$, aber dieser Punkt ist kein Verzweigungspunkt, da sich die Funktion in seiner Nähe wie z^2 verhält; man hat dann in der Nähe dieses Punktes

$$w - w_0 = \pm \tfrac{1}{3} z^3;\ z = \pm \sqrt[3]{3}\,(w - w_0)^{\frac{1}{3}},$$

so dass in $w = w_0$ drei Blätter zusammenhängen. Wir sehen also, dass z mehrdeutig ist, und wir können zeigen, dass die Wertanzahl unendlich ist; endlichen Werten von w entsprechen nämlich endliche Werte von z, da w nur unendlich wird für $z = \infty$, und zwar algebraisch unendlich. Wenn z eine end-

Digitized by Google

endliche Anzahl von Werten hätte, müsste also eine symmetrische Funktion von diesen eine eindeutige doppelperiodische Funktion sein, die nicht unendlich würde, und das ist, wie wir wissen, unmöglich.

55. Zwischen den zum Integrale ω von erster Art gehörenden Perioden $2\omega_1$ und ω_2 und den zum Integral (w) von zweiter Art gehörenden Perioden $2(\omega_1)$ und (ω_2) giebt es eine Relation, die von *Legendre* gefunden worden ist. Um sie abzuleiten, wollen wir das Integral

$$\int w\,(w)'\,dz$$

betrachten, das wir in positiver Richtung längs der Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche führen wollen, auf die sich die zu $\Delta(z,k)$ gehörige zweiblättrige *Riemann*sche Fläche durch zwei Schnitte reduciren lässt. Diese Begrenzung hat die Form, die wir in der Figur auf S. 60 dargestellt haben.

In zwei Nachbarpunkten der Kurven 1 und 2 hat Δ und deshalb auch $(w)'$ denselben Wert, während dz verschiedene Vorzeichen hat. Das Integral w hat auf 2 einen Wert, der gleich ist demjenigen auf 1, vermehrt um den Wert des Integrals, wenn es längs 4 genommen wird; das Integral längs 1 und 2 lässt sich deshalb zusammenziehen in

$$-\int \omega_2 (w)'\,dz,$$

genommen längs 1, und erhält also den Wert $-2\omega_2(\omega_1)$; auf dieselbe Weise sieht man, das der Wert des Integrals, wenn es längs 3 und 4 genommen wird, gleich $2\omega_1(\omega_2)$ ist.

Nun können wir jedoch den Wert des Integrals auf eine andere Art bestimmen; da es nämlich längs dem Umfange eines einfach zusammenhängenden Flächenstücks genommen wird, ist es gleich der $2\pi i$-fachen Summe der Residuen im Flächenstück. Wir dürfen nicht schliessen, dass diese Summe Null ist, da die Begrenzung des Flächenstücks sich nicht in einen Punkt zusammenziehen lässt ohne die Punkte des begrenzten Flächenstücks zu passieren.

Im Verzweigungspunkte 1 verhält w sich wie $(1-z)^{\frac{1}{2}}$, $(w)'$

Digitized by Google

wie $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$. Die Funktion ist hier also endlich, und dasselbe gilt von den übrigen Verzweigungspunkten; es bleibt dann nur noch übrig, die beiden Punkte ∞ zu untersuchen. Setzen wir $z=u^{-1}$, so finden wir, dass w sich in der Nähe von $u=0$, abgesehen von einem konstanten Gliede, wie $\pm u:k$ verhält, während $(w)'$ sich wie $\pm (ku)^{-2}$ verhält, wo das Vorzeichen an beiden Stellen dasselbe ist. Das Produkt hat also in beiden Punkten das Residuum $+1:k^2$. Wir haben also *Legendres* Relation

$$\omega_1(\omega_2)-\omega_2(\omega_1)=2\pi i:k^2. \tag{36}$$

KAPITEL V.

TRANSFORMATIONEN DER ELLIPTISCHEN INTEGRALE.

DIE ALLGEMEINE JACOBISCHE TRANSFORMATION.

56. Für ein Differential von der Form

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \tag{1}$$

wo

$$Y=a_0(y-a)(y-b)(y-c)(y-d),$$

hat *Jacobi* (Fundamenta nova, Berlin 1829) sich die Aufgabe gestellt, zwei ganze Funktionen von x, U und V, beide vom Grade p, oder die eine vom Grade p, die andere vom Grade $p-1$, so zu bestimmen, dass das Differential durch die Substitution $y=U:V$ in ein neues Differential von derselben Form übergeht. Wir setzen voraus, dass U und V keinen gemeinschaftlichen Faktor haben und sagen dann, dass *die Substitution vom Grade p ist.*

Das transformierte Differential wird

$$\frac{(VU'-UV')\,dx}{\sqrt{a_0(U-aV)(U-bV)(U-cV)(U-dV)}}. \tag{2}$$

Digitized by Google

Zerlegen wir die Faktoren unter dem Wurzelzeichen in Faktoren ersten Grades, so können nur vier von diesen einzeln vorkommen, während die übrigen paarweise vorkommen müssen, so dass man sie vor das Wurzelzeichen bringen kann. Da U und V keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so können zwei von den Faktoren unter dem Wurzelzeichen auch keinen solchen haben, und ein vorkommender quadratischer Faktor muss sich deshalb in einem von den vier Faktoren finden. Ein Faktor, der sich zweimal z. B. in $U - aV$ findet, wird einmal im Zähler vorkommen, da

$$VU' - UV' = V(U - aV)' - V'(U - aV).$$

Diese Faktoren lassen sich also durch Verkürzen entfernen. Da die Grösse unter dem Wurzelzeichen vom Grade $4p$ ist, so muss das Produkt aus den quadratischen Faktoren vom Grade $4p - 4$ sein, und der Faktor, der durch Verkürzen entfernt wird, vom Grade $2p - 2$. Von diesem Grade ist jedoch auch der Zähler, da das Glied vom höchsten Grade dasselbe ist in VU' wie in UV', wenn U und V beide vom $p$ten Grade sind. Das transformierte Differential ist also von derselben Form wie das ursprüngliche.

TRANSFORMATIONEN ERSTEN GRADES.

57. Die allgemeinste Form solcher Transformationen ist

$$y = \frac{m + nx}{m_1 + n_1 x}; \quad mn_1 - nm_1 = D \gtrless 0. \tag{3}$$

Mit Hülfe dieser erhält man, nachdem die Brüche fortgeschafft sind,

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{D\,dx}{\sqrt{X}}, \tag{4}$$

wo X ein Polynom vom vierten Grade bedeutet, in dem der $y - a$ entsprechende Faktor

$$m + nx - a(m_1 + n_1 x)$$

ist; dieser wird Null für

(5) $$x = \frac{m - a m_1}{a n_1 - n}.$$

Die vier Nullpunkte werden also derselben linearen Transformation unterworfen, und das bringt wie bekannt mit sich, dass das Doppelverhältniss unverändert bleibt, während wir im übrigen, da wir über drei Konstanten zu disponieren haben, die neuen Nullpunkte dahinbringen können drei Bedingungen zu genügen.

Wir wollen nun im besonderen die Transformationen in die gewöhnlich angewandten Normalformen betrachten.

58. In der *Riemann*schen Normalform sind die Nullpunkte $0, 1, \infty$ und $\frac{1}{\lambda}$; lassen wir diese der Reihe nach a, b, c, d entsprechen, und verstehen wir unter dem Doppelverhältnis dieser, wenn sie in der angegebenen Reihenfolge genommen werden,

$$\frac{a - b}{a - d} : \frac{c - b}{c - d},$$

so ist das Doppelverhältnis der vier neuen Punkte eben λ. Dadurch ist also λ eindeutig bestimmt, wenn die Wurzeln in $Y = 0$ bekannt sind und in einer bestimmten Reihenfolge benutzt werden; durch Veränderung dieser Reihenfolge können wir wie bekannt im ganzen 6 von einander linear abhängige Werte von λ erhalten, und λ muss sich also, wenn nur die Koefficienten in Y gegeben sind, durch eine Gleichung 6ten Grades bestimmen lassen. Um diese bilden zu können, müssen wir einige Bemerkungen vorausschicken, die der Theorie der Invarianten entnommen sind.

59. Wenn wir in eine Form von $n$ter Ordnung

$$a_0 y_1^n + \frac{n}{1} a_1 y_1^{n-1} y_2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 y_1^{n-2} y_2^2 + \ldots + a_n y_2^n$$

die Werte

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2; \quad y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$$

Digitized by Google

einsetzen, wo die Substitutionsdeterminante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht Null ist, so geht die Form über in eine neue Form $n$ter Ordnung:

$$b_0 x_1 + \frac{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + b_n x_2^n.$$

Nun giebt es gewisse ganze Funktionen der Koefficienten a (darunter sind a_0, a_1, a_2 ... zu verstehen), die, wenn diese mit den entsprechenden b vertauscht werden, nur mit einer Potenz der Substitutionsdeterminante multipliciert werden.

In diesen Funktionen, den sogenannten *Invarianten*, sind alle Glieder von demselben Grade in den Koefficienten (dem Grade der Invariante), und alle Glieder haben dieselbe Indexsumme (Gewicht der Invariante). Das Gewicht ist eben der Exponent derjenigen Potenz der Determinante, mit der die Invariante bei der Transformation multipliciert wird. Aus den ganzen Invarianten lassen sich gebrochene bilden, bei denen Zähler und Nenner dasselbe Gewicht haben; diese bleiben vollkommen unverändert bei den linearen Transformationen und heissen *absolute Invarianten.*

Die Form 4ter Ordnung hat die beiden Invarianten

$$g_2 = a_0 a_4 + 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2; \quad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Aus diesen bildet man die Diskriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

und die absolute Invariante

$$I = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

60. Nun können wir leicht die gesuchte Gleichung in λ bilden. Bringen wir die Funktion unter dem Wurzelzeichen im *Riemann*schen Integral auf homogene Form, so erhalten wir

$$x_1 x_2 (x_2 - x_1)(x_2 - \lambda x_1);$$

Digitized by Google

da diese Form entsteht, wenn Y linear transformiert und auf homogene Form gebracht wird, so muss die absolute Invariante in den beiden Fällen dieselbe sein, und wir brauchen nur diejenige für den obenstehenden Ausdruck zu berechnen, um die Gleichung zwischen λ und I zu erhalten. Dadurch erhalten wir

$$(6) \qquad 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 = 27\lambda^2(1-\lambda)^2 I,$$

eine Gleichung, die wir schon früher behandelt haben (S. 37—38).

Wir sehen also, dass alle elliptischen Integrale erster Art, für welche der absolute Invariante denselben Wert hat, zu derselben (sechsfachen) *Riemann*schen Normalform führen, abgesehen von einem konstanten Faktor.

Um die *Legendre*sche Normalform zu bilden, lassen wir a, b, c, d der Reihe nach 1, -1, k^{-1}, $-k^{-1}$ entsprechen; daraus erhalten wir

$$(7) \qquad \lambda = \frac{4k}{(1+k)^2};$$

setzen wir diesen Ausdruck in die voranstehende Gleichung ein, so ergiebt sich

$$(8) \qquad (k^4 + 14k^2 + 1)^3 = 108k^2(1-k^2)^4 I.$$

Weierstrass will unter dem Wurzelzeichen einen Ausdruck haben, der unter homogener Form dargestellt wird durch

$$4x_1^3 x_2 - A x_1 x_2^3 - B x_2^4.$$

Hier wird also von den neuen Nullpunkten verlangt, dass der eine auf ∞ fällt, während die drei übrigen die Summe Null haben und der Koefficient des ersten Gliedes 4 ist. Hierzu fügen wir die Bedingung, dass die Substitutionsdeterminante 1 sein soll, so das g_2 und g_3 bei der Transformation nicht verändert werden; wir haben

$$a_0 = a_2 = 0;\ a_1 = 1;\ a_3 = -\tfrac{1}{4}A;\ a_4 = -B,$$

also $g_2 = A$; $g_3 = B$; mithin erhalten wir unter dem Wurzelzeichen

$$(9) \qquad 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Digitized by Google

61. Bei der allgemeinen linearen Transformation haben wir die Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{D\,dx}{\sqrt{X}}.$$

gebildet.

Die zu $\sqrt{Y}$ gehörige *Riemann*sche Fläche ist in diejenige transformiert, die zu $\sqrt{X}$ gehört; die beiden Flächen werden, da die Transformation linear ist, einander Punkt für Punkt entsprechen, und namentlich wird eine geschlossene Kurve, die in der einen Fläche ein Flächenstück nicht allein begrenzt, in der anderen Fläche einer Kurve von derselben Eigenschaft entsprechen. Wenn wir die beiden Differentiale, jedes längs seiner von den beiden Kurven, integrieren, so zeigt die Gleichung, dass die Elemente der Integrale beständig paarweise gleich gross sind; die beiden Integralen müssen also denselben Wert erhalten. Die durchlaufenen Wege sind indessen Periodenwege, und die beiden Integrale erhalten also dieselben Periodicitätsmoduln. Da sich nun zwei beliebige Funktionen vierten Grades aus einander durch eine lineare Transformation bilden lassen, wenn sie dieselbe absolute Invariante haben, so haben die beiden Integrale von der Form (1), wenn die Funktionen dieselben I haben, Periodicitätsmoduln, die nur durch den Faktor D verschieden sind. Dass Periodenverhältnis wird von diesem Faktor unabhängig und daher von I allein abhängig. Das stimmt zu dem Umstande, dass wir bei der Betrachtung von $\lambda(z)$ eine Gleichung zwischen q und k gebildet haben.

TRANSFORMATIONEN ZWEITEN GRADES.

62. Ist die Transformation vom zweiten Grade, so müssen zwei Faktoren zweiten Grades sich vor das Wurzelzeichen bringen lassen; das wird erreicht, wenn man

$$\frac{y-a}{y-b} = \left(\frac{m+nx}{m_1+n_1x}\right)^2 \tag{10}$$

setzt.

Wenn man hier die Quadratwurzel auszieht und differentiiert, so erhält man, wenn $D = mn_1 - nm_1$,

Digitized by Google

$$\frac{(a-b)\,dy}{2(y-b)\sqrt{(y-a)(y-b)}} = \frac{D\,dx}{(m_1+n_1x)^2};$$

es ist aber

$$y-b = \frac{(a-b)(m_1+n_1x)^2}{(m_1+n_1x)^2-(m+nx)^2},$$

folglich

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)}} = \frac{2D\,dx}{(m_1+n_1x)^2-(m+nx)^2}.$$

Der Nenner des letzten Bruches dient dazu, den Nenner in $(y-c)(y-d)$ fortzuschaffen; wir erhalten also, wenn wir $a_0=1$ setzen,

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{2D\,dx}{\sqrt{[(a-c)(m_1+n_1x)^2-(b-c)(m+nx)^2]\,[(a-d)(m_1+n_1x)^2-(b-d)(m+nx)^2]}}.$$

Die neuen Nullpunkte werden bestimmt durch

$$\frac{m+nx}{m_1+n_1x} = \pm\sqrt{\frac{a-c}{b-c}} \text{ und } = \pm\sqrt{\frac{a-d}{b-d}}.$$

Wollen wir *Legendres* Normalform haben, so können wir $m=n_1=0$, $m_1=1$ setzen, und die beiden ersten Nullpunkte $+1$ und -1 sein lassen; dadurch erhalten wir

$$(11)\quad n=\sqrt{\frac{a-c}{b-c}};\ k^2=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b};\ g=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-d)(b-c)}.$$

Hier erhalten wir k^2 ausgedrückt als eines von den Doppelverhältnissen der vier Nullpunkte; das stimmt nicht zu dem Ausdruck, den wir durch die lineare Transformation erhielten, was darin liegt, dass der Multiplikator in den beiden Fällen verschieden ist.

ABELS TRANSFORMATIONSPROBLEM.

63. Setzen wir

$$(12)\qquad \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

und lassen wir $y=y_0$ einem $x=0$ entsprechen, so bestimmt diese Gleichung y als Funktion von x. Diese Funktion wird

Digitized by Google

in der Regel transcendent sein, aber in besonderen Fällen kann sie algebraisch sein, und *Abel* hat sich die Aufgabe gestellt, diese Fälle zu finden. In der Differentialgleichung ist dann k als gegeben zu betrachten, während man solche Werte für g_1 und k_1 sucht, für welche die Gleichung ein algebraisches Integral hat.

Bezeichnen wir die Wurzelgrössen beziehungsweise mit $\Delta_1(y)$ und $\Delta(x)$, und setzen wir

$$(13) \qquad \int_0^{y_0} \frac{dy}{g_1 \Delta_1(y)} = \alpha, \quad \int_0^{x} \frac{dx}{\Delta(x)} = z,$$

so erhalten wir, wenn Multiplikator und Modulus in der Funktionsbezeichnung angegeben werden,

$$(14) \qquad x = \lambda(z,\ 1,\ k);\ y = \lambda(z + \alpha, g_1, k_1).$$

Soll nun zwischen x und y eine algebraische Relation bestehen, so muss *einem* Werte von jeder dieser Grössen eine endliche Anzahl von Werten der anderen entsprechen, und in 25 haben wir gesehen, dass hierfür als notwendige und ausreichende Bedingung erforderlich ist, dass die beiden Funktionen ein gemeinschaftliches Periodenparallelogramm haben. Hat dieses die Perioden $2\Omega_1$ und Ω_2, während x und y beziehungsweise die primitiven Periodenpaare $(2\omega_1, \omega_2)$ und $(2\omega_1', \omega_2')$ haben, so muss es also Gleichungen von der Form

$$2\Omega_1 = 2a\omega_1 + b\omega_2;\ \Omega_2 = 2a_1\omega_1 + b_1\omega_2$$

geben, wo die Koefficienten ganze Zahlen sind. N sei die Determinante $ab_1 - a_1 b$. Für das zu y gehörende Periodenpaar gelten analoge Gleichungen mit der Determinante N_1.

Lösen wir die beiden Gleichungen und die analogen mit Bezug auf $2\omega_1, \omega_2, 2\omega_1', \omega_2'$, so erhalten wir diese Grössen linear ausgedrückt durch die gemeinschaftlichen Perioden mit Koefficienten, die Brüche sind mit den Nennern N und N_1. Ist M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von diesen, und setzen wir

Digitized by Google

$$2\Omega_1 = M \cdot 2\varepsilon_1;\ \Omega_2 = M \cdot \varepsilon_2,$$

dann lassen sich die zu x und y gehörenden Perioden linear mit ganzen Koefficienten durch $2\varepsilon_1$ und ε_2 ausdrücken. Diese bestimmen ein Parallelogramm, das gemeinschaftliches Maass für diejenigen ist, die zu x und y gehören; giebt es ein grösseres Parallelogramm mit derselben Eigenschaft, so wollen wir unter $2\varepsilon_1$ und ε_2 dessen Seiten verstehen, und unter $\lambda(z, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ die doppelperiodische Funktion, die dieses als primitives Periodenparallelogramm hat; diese Funktion ist mit x verbunden durch eine algebraische Gleichung, die mit Bezug auf sie vom zweiten Grade ist; die Funktion hat die Nullpunkte 0 und ε_1; wir erhalten also eine gerade Funktion, wenn wir $z + \frac{1}{2}\varepsilon_1$ für z setzen; auf dieselbe Weise bilden wir aus x eine gerade Funktion, wenn wir $z + \frac{1}{2}\omega_1$ für z setzen; wir haben gesehen, dass zwischen diesen beiden Funktionen eine Gleichung existiert, die mit Bezug auf die erste vom ersten Grade ist; vertauschen wir in dieser Gleichung z mit $z - \frac{1}{2}\omega_1$, und setzen wir

$$\lambda(z + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}\omega_1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = u,$$

so haben wir in u eine doppelperiodische Funktion, die sich rational durch x ausdrücken lässt; auf dieselbe Weise sehen wir, dass

$$v = \lambda(z + \alpha + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}\omega_1', \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

sich rational durch y ausdrücken lässt.

Setzen wir nun

$$z + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \omega_1) = \zeta;\ \alpha + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \omega_1') = \beta,$$

so haben wir

$$u = \lambda(\zeta);\ v = \lambda(\zeta + \beta),$$

wo die Perioden in beiden Fällen $2\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sind; durch diese sind Multiplikator und Modul bestimmt; diese seien g_2 und k_2. Setzen wir mit Beibehaltung der Perioden $\lambda(\beta) = h$, so liefert das Additionstheorem

$$v(1 - k_2^2 h^2 u^2) = u\,\Delta_2(h) + h\,\Delta_2(u);$$

daraus ergiebt sich die Form der Relation zwischen x und y.

Digitized by Google

Die Gleichung zeigt, dass die Funktion v, die eine rationale Funktion von y ist, sich rational ausdrücken lässt durch x und die Quadratwurzel aus einem ganzen Polynom in x.

Wir haben also gezeigt, dass, wenn die Aufgabe Lösungen hat, rationale Transformationen existieren müssen, welche die Gleichungen

$$\frac{du}{g_2 \Delta_2(u)} = \frac{dx}{\Delta(x)}; \quad \frac{dv}{g_2 \Delta_2(v)} = \frac{dy}{g_1 \Delta_1(y)}$$

identisch machen; in der ersten von diesen ist dann k gegeben, während k_2 und g_2 gesucht werden; durch diese müssen dann g_1 und k_1 aus der zweiten Gleichung bestimmt werden; wir haben hier also dieselbe Aufgabe, die wir stellten, aber in einer wesentlich einfacheren Form, da wir es nur mit rationalen Lösungen zu thun haben. Unter dem Transformationsproblem versteht man in der Regel diese specielle Aufgabe; sie ist ungefähr gleichzeitig von *Abel* und *Jacobi* gelöst worden.

64. Indem wir zu den ursprünglichen Bezeichnungen zurückkehren, nehmen wir also an, dass wir haben:

$$(15) \qquad y = \lambda(z + \alpha, g_1, k_1); \; x = \lambda(z, 1, k),$$

wo y eine rationale Funktion von x ist; das erfordert, dass

$$2\omega_1 = 2a\omega_1' + b\omega_2'; \; \omega_2 = 2a_1\omega_1' + b_1\omega_2',$$

wo a, b, a_1, b_1 ganze Zahlen sind.

Einem Werte von x entsprechen zwei Werte von z, nämlich z und $\omega_1 - z$; diesen soll derselbe Wert von y entsprechen, so dass

$$\lambda(z + \alpha) = \lambda(\omega_1 + 2\alpha - (z + \alpha)),$$

wo die Perioden $2\omega_1'$ und ω_2' sind. Das erfordert,

$$\alpha = -(a-1)\frac{\omega_1'}{2} - b\frac{\omega_2'}{4} + p\omega_1' + q\frac{\omega_2'}{2},$$

wo p und q willkürliche ganze Zahlen sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefert ein Wert von x nur einen Wert von y; y ist also eine rationale Funktion von x. Die Glei-

Digitized by Google

chung ist in y vom Grade $ab_1 - ba_1$, wodurch der Grad der Transformation angegeben wird.

65. Ist $y = \varphi(x)$ die gesuchte rationale Gleichung, so muss $\varphi(x)$ ausser von x von den in der Differentialgleichung enthaltenen Konstanten abhängig sein, und solche Transformationen der Differentialgleichung, die das Problem nicht verändern, müssen, an der rationalen Lösung ausgeführt, diese entweder unverändert lassen, oder neue Lösungen geben. Hier können wir uns merken:

k und k_1 können mit $-k$ und $-k_1$ vertauscht werden.

Zwei von den Grössen x, y und g können gleichzeitig das Vorzeichen wechseln.

x lässt sich mit $-\frac{1}{kx}$, oder y mit $-\frac{1}{k_1 y}$ vertauschen.

y lässt sich mit $k_1 y$ vertauschen, wenn g_1 erst mit $g_1 k_1$ und k_1 mit $\frac{1}{k_1}$ vertauscht wird; die verschiedenen Werte von k_1, die einem gegebenen k entsprechen, sind deshalb paarweise reciprok.

Wir unterscheiden nun zwischen 4 Fällen:

1. *a ungerade, b gerade.* Man erhält $\alpha = p' \omega_1' + \frac{1}{2} q_1 \omega_2'$, wo p_1 und q_1 ganze Zahlen bedeuten. α erhält also, abgesehen von ganzen Perioden, die vier Werte 0, ω_1', $\frac{1}{2}\omega_2'$, $\frac{1}{2}\omega_2' + \omega_1'$. Die beiden ersten erteilen y Werte, die gleichgross mit entgegengesetzten Zeichen sind, und dasselbe ist mit den beiden letzten der Fall. Endlich wird der dritte aus dem ersten durch die Substitution $\frac{1}{k_1 y}$ abgeleitet (42); wir haben hier also nur die Gleichung $\alpha = 0$ zu betrachten.

2. *a gerade, b ungerade.* $\alpha = \frac{1}{2}(2p_1 + 1)\omega_1' + \frac{1}{4}(2q_1 + 1)\omega_2' = \pm \frac{1}{2}\omega_1' \pm \frac{1}{4}\omega_2'$; man braucht nur eine von den Lösungen zu betrachten, da die übrigen daraus abgeleitet werden durch die Substitutionen $-y$ und $\pm\frac{1}{k_1 y}$.

3. *a und b ungerade.* Dieser Fall lässt sich auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dass man statt des primitiven Periodenpaares $(2\omega_1', \omega_2')$ das andere primitive Paar

Digitized by Google

$(2\omega_1', 2\omega_1' + \omega_2')$ nimmt; dadurch wir a mit $a - b$ vertauscht, und dies ist eine gerade Zahl.

4. *a und b gerade.* $\alpha = \frac{1}{2}(2p_1 + 1)\omega_1' + \frac{1}{2}q_1\omega_2'$; die vier Werte sind $\pm\frac{1}{2}\omega_1'$ und $\pm\frac{1}{2}\omega_1' + \frac{1}{2}\omega_2'$; von diesen braucht man nur $\frac{1}{2}\omega_1'$ zu betrachten.

TRANSFORMATIONEN ERSTEN GRADES.

66. Hier kann der vierte Fall nicht eintreten, da wir $ab_1 - ba_1 = 1$ haben; da der dritte auf den zweiten reduciert wird, haben wir also von wesentlich verschiedenen Fällen nur 1 und 2 zu betrachten.

1. a ungerade, b gerade, $\alpha = 0$; b_1 muss ungerade sein; wir setzen dann $a = 2\gamma + 1$, $b = 2\beta$, $b_1 = 2\beta_1 + 1$, und haben $\omega_1 = (2\gamma + 1)\omega_1' + \beta\omega_2'$; $\omega_2 = 2a_1\omega_1' + (2\beta_1 + 1)\omega_2'$.

Hieraus erkennt man, dass die beiden Funktionen x und y dieselben Nullpunkte und Pole haben, so dass ihr Verhältnis eine Konstante ist; diese und die entsprechenden Werte von g_1 und k_1 bestimmt man leicht durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

2. Ist a gerade und b ungerade, so benutzt man am einfachsten das direkte Einsetzen. Da die Gleichung vom ersten Grade in x sein muss, so hat sie die Form

$$y = \frac{m + nx}{m_1 + n_1 x}.$$

Eins von den Doppelverhältnissen zwischen den vier Nullpunkten in X ist z. B.

$$\lambda = \left(\frac{1 + k}{1 - k}\right)^2;$$

wir haben also zur Bestimmung von k_1

$$\left(\frac{1 + k_1}{1 - k_1}\right)^2 = \lambda,$$

wo sich statt λ jedes andere von den 6 Doppelverhältnissen setzen lässt.

Digitized by Google

Haben wir eins von diesen gewählt, so ist dadurch bestimmt, wie die Nullpunkte in X und Y einander entsprechen, und dadurch werden dann die Koefficienten im Ausdruck für y bestimmt.

Wählen wir z. B. das Doppelverhältnis

$$\frac{\lambda}{\lambda-1}=\frac{(1+k)^2}{4k},$$

so erhalten wir

$$k_1=\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2. \tag{16}$$

Hierdurch sind die Nullpunkte als einander paarweise entsprechend bestimmt; es entsprechen sich nämlich $\frac{1}{k}$ und 1, -1 und $-\frac{1}{k_1}$, 1 und -1, $-\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{k_1}$.

Hieraus erhält man

$$m+m_1=-n-n_1;\ k(m-m_1)=n_1-n;\ \frac{m-n}{m_1-n_1}+\frac{km-n}{km_1-n_1}=0;$$

$$y=\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}\cdot\frac{1-x\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}}. \tag{17}$$

Bei Bestimmung des Multiplikators kann man $x=0$ setzen; man findet

$$g_1=\pm\tfrac{1}{2}i(1-k). \tag{18}$$

TRANSFORMATIONEN HÖHEREN GRADES.

67. Ist die Transformation vom Grade n, so haben wir $ab_1-ba_1=n$, wodurch ausgedrückt wird, dass der Inhalt des Parallelogramms $(2\omega_1,\ \omega_2)$ n-mal so gross ist als der Inhalt von $(2\omega_1',\ \omega_2')$; wir erhalten jedoch denselben Wert der Determinante, wenn wir

$$2\omega_1=2\omega_1';\ \omega_2=n\omega_2'$$

setzen, und wir haben früher gezeigt, dass zwei demselben

Digitized by Google

Netz angehörenden Parallelogramme von demselben Inhalt sich in einander überführen lassen durch eine Transformation mit der Determinante 1. Wir können also, wenn wir eine Transformation ersten Grades ausführen, die Aufgabe auf die folgende reducieren:

Die Funktion $\lambda(z, \omega_2)$ mit den Perioden $2\omega_1$ und ω_2 durch die Funktion $\lambda(z, n\omega_2)$ mit den Perioden $2\omega_1$ und $n\omega_2$ auszudrücken.

Wir wollen voraussetzen, dass n eine ungerade Zahl ist; dann hat man

$$\lambda(z, \omega_2) = A \Pi \lambda(z + q\omega_2, \; n\omega_2), \tag{19}$$

wo q die Werte von $-\frac{1}{2}(n-1)$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$, diese beiden mitgerechnet, haben soll, und wo A eine Konstante bedeutet; man sieht nämlich sofort, dass die beiden Funktionen dieselben Nullpunkte und Pole haben.

Aus dem Additionstheorem für $\lambda(z)$ ergiebt sich leicht die Formel

$$\lambda(z+t)\lambda(z-t) = \frac{\lambda^2(z) - \lambda^2(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}. \tag{20}$$

Man kann diese Formel benutzen um die Faktoren in (19) paarweise zusammenzuziehen, nämlich solche, die gleich grossen Werten von q mit entgegengesetzten Vorzeichen entsprechen, während der Wert, der $q = 0$ entspricht, stehen bleibt. Das Resultat ist also ein rationaler Ausdruck in $\lambda(z, n\omega_2)$, in dem der Zähler vom Grade n, der Nenner vom Grade $n-1$ ist.

Um die Konstante A zu bestimmen, hat man zu beachten, dass (19) auch gilt, wenn man θ_3 für λ setzt, da die Funktionen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens denselben Periodicitätsbedingungen genügen und dieselben Nullpunkte haben. Geht man auf gewöhnliche Weise über zu einer von den anderen θ-Funktionen, so wird die Gleichung nur dadurch verändert, dass eine von diesen an die Stelle von θ_3 kommt; namentlich aber wird der konstante Faktor nicht verändert. Durch Division der so erhaltenen Gleichungen, nämlich derjenigen, die für θ_1 und θ gelten, und durch Benutzung der ersten Formel (3) findet man dann

Digitized by Google

(21) $$A = \sqrt{k^n} : \sqrt{k_1},$$

wo k der gegebene, k_1 der gesuchte Modulus ist. Setzt man in (19) $z = \frac{1}{2}\omega_1$, und beachtet man, dass

$$\lambda(z + \tfrac{1}{2}\omega_1) = \mu(z) : \nu(z); \ \lambda(\tfrac{1}{2}\omega_1) = 1,$$

so findet man

$$\sqrt{k_1} = \sqrt{k^n}\, \Pi \frac{\mu(q\omega_2)}{\nu(q\omega_2)}.$$

Das Produkt Π lässt sich als Funktion von k bestimmen durch eine algebraische Gleichung, die sogenannte *Modulargleichung.*

Wir wollen diese Untersuchungen jedoch nicht weiter fortsetzen, da das Entwickelte genügt, um die Möglichkeit der Lösung des *Abel*schen Transformationsproblems und die Methoden, die dabei zur Anwendung kommen, zu zeigen. Eine detaillierte Durchführung findet sich in *Abels* gesammelten Werken und in dem oben genannten Werk von *Briot* und *Bouquet.*

KAPITEL VI.

DIE ELLIPTISCHEN MODULFUNKTIONEN.

DIE SCHWARZSCHEN S-FUNKTIONEN.

Wir haben S. 213 die hypergeometrische Reihe erwähnt, in der wir x als die Variable, α, β und γ als beliebige Parameter betrachten; wir haben gesehen, dass sie einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, und dass das Verhältnis s zwischen zwei beliebigen von den partikulären Integralen dieser Gleichung bestimmt wird durch die Gleichung dritter Ordnung (wo wir z statt x gesetzt haben)

(1) $$\{s, z\} = 2I,$$

wo I die zur Gleichung zweiter Ordnung gehörende Invariante

Digitized by Google

bedeutet. Die Gleichung (1) hat die Eigenschaft, dass ihr allgemeines Integral sich als eine lineare Funktion eines beliebigen partikulären Integrals darstellen lässt; die verschiedenen Zweige der durch die Gleichung definierten Funktion werden also durch lineare Transformationen in einander übergeführt. Jeder von den Werten der Funktion bildet die Halbebene ab auf einem Kreisbogendreieck mit bestimmten, von den Parametern abhängigen Winkeln, deren Scheitelpunkte den drei singulären Punkten 0, 1 und ∞ der Funktion entsprechen. Die Differentialgleichung definiert unendlich viele specielle Funktionen, entsprechend den verschiedenen Werten der Parameter; diese heissen *Dreiecksfunktionen oder Schwarzsche s-Funktionen.*

69. Bildet man durch einen der Funktionswerte die eine Halbebene auf einem Kreisbogendreieck ab, so wird dessen Spiegelbild in einer von seinen Seiten das Bild der anderen Halbene; welche Seite die beiden Dreiecke gemeinsam haben, ist davon abhängig, welches von den drei, durch die Verzweigungspunkte bestimmten Stücken der reellen Axe man passiert, wenn man von der einen Halbebene zu der anderen geht; wir schraffieren wie früher das eine von den beiden Dreiecken; ein schraffiertes und ein nicht schraffiertes Dreieck bilden dann zusammen das Bild der ganzen Ebene, d. h. eines Blattes in der *Riemann*schen Fläche der s-Funktion. Durch fortgesetzte Spiegelung in den Dreiecksseiten erhält man Bilder der übrigen Blätter.

Die Bedingung dafür, dass die s-Funktion algebraisch ist, besteht darin, dass man durch fortgesetzte Spiegelung nur eine endliche Anzahl von Dreiecken erhalten kann. Hierfür haben wir ein Beispiel gesehen in der Gleichung auf S. 37, die 6 schraffierte und 6 nicht schraffierte Dreiecke bestimmt, in Übereinstimmung damit, dass die Funktion durch eine Gleichung sechsten Grades bestimmt wird. Jede von den Wurzeln dieser Gleichung ist eine lineare Funktion von jeder der übrigen, und jede von den linearen Transformationen, die eine Wurzel in eine andere überführt, führt auch ein Dreieckspaar über in eins von den übrigen.

Die erwähnte Gleichung bestimmt eben das Doppeltverhältnis

Digitized by Google

durch die absolute Invariante, und das erste ist also eine algebraische s-Funktion der letzten. Die Dreieckswinkel sind $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{3}\pi$, entsprechend dem Umstande, dass in den Verzweigungspunkten beziehungsweise zwei, zwei und drei Blätter zusammenhängen. Ein anderes Beispiel für algebraische s-Funktionen haben wir in $\sqrt{k}$ als Funktion von I; hier ist die Gleichung vom Grade 24 und die Winkel sind $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$; ferner in $\sqrt{k}$ als Funktion von λ, wo die Gleichung vom vierten Grade ist und die Winkel alle $\frac{1}{2}\pi$ sind[1]).

70. Wir wollen uns nur mit solchen s-Funktionen beschäftigen, deren umgekehrte Funktionen *eindeutige* Funktionen sind. Die Bedingung hierfür besteht darin, dass die durch Spiegelung gebildeten Dreiecke an keinem Punkte die Ebene mehr als einmal überdecken. Da ein Dreieck in seinem Innern keinen Verzweigungspunkt hat, und die Dreiecke, die um einen gemeinsamen Eckpunkt herumliegen, abwechselnd schraffiert und weiss sind, so dass ihre Anzahl gerade ist, so ist hierfür erforderlich, dass jeder Winkel des Dreiecks ein Submultiplum von π ist. Hierzu muss man jedoch den Fall rechnen, dass ein Winkel Null sein kann; in dem entsprechenden Verzweigungspunkt hängen dann unendlich viele Blätter zusammen, und die Funktion ist notwendig transcendent; wir haben früher (S. 212) erwähnt, dass in der Reihenentwickelung einer Funktion von einem Verzweigungspunkt aus, in dessen Bild sich die beiden Kreisbogen berühren, Logarithmen vorkommen.

Die Winkel der Dreiecke haben wir mit $\lambda\pi$, $\mu\pi$ und $\nu\pi$ bezeichnet und gesehen, dass die notwendige Bedingung dafür, dass die umgekehrte Funktion eindeutig ist, darin besteht, dass λ, μ und ν, so weit sie nicht Null sind, Brüche mit dem Zähler 1 sind. Die reciproken Werte von λ, μ, ν müssen also ganze Zahlen sein; wir wollen sie mit λ_1, μ_1, ν_1 bezeichnen.

Nun teilen wir die Dreiecksfunktionen in Funktionen *erster*, *zweiter* und *dritter* Art, je nachdem

$$(2) \qquad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\nu_1} \gtreqless 1.$$

[1]) Felix Klein, Theorie der elliptischen Modulfunktionen.


Digitized by Google

Im ersten Falle ergeben sich, wie man leicht nachweist, keine andere Lösungen als (n positiv und gerade)

$$2, 2, n; \quad 2, 3, 3; \quad 2, 3, 4; \quad 2, 3, 5.$$

Diese stehen alle in naher Verbindung mit den regelmässigen Körpern; die Dreiecke lassen sich nämlich durch eine passende stereographische Projektion so auf die Kugel übertragen, dass die Seiten Bogen grösster Kreise werden; die Dreiecke werden dann abwechselnd kongruent und symmetrisch und bestimmen eine regelmässige Einteilung der Kugeloberfläche[1]). *Schwarz* hat zuerst in einer berühmten Abhandlung (Crelles Journal, Bd. 75) gezeigt, dass hierdurch alle diejenigen s-Funktionen bestimmt sind, deren umgekehrte Funktionen rationale Funktionen sind.

71. Im zweiten Falle sind die Dreiecksseiten Geraden oder Teile von Kreisen, die durch denselben Punkt gehen. Die Lösungen sind

$$2, 3, 6; \quad 2, 4, 4; \quad 3, 3, 3; \quad 2, 2, \infty.$$

Nimmt man die Dreiecksseiten gerade, so erhält man die Ebene genau einmal überdeckt, aber da hierzu unendlich viele Dreiecke benutzt werden, so ist die umgekehrte eindeutige Funktion transcendent. In der Nähe des unendlich fernen Punktes erhält die Funktion alle Werte unendlich viele Male.

72. Im dritten Falle können wir uns denken, was sich durch eine lineare Transformation erreichen lässt, dass zwei von den Seiten gerade Linien sind; sind diese AB und AC, so muss BC, da die Winkelsumme kleiner ist als π, Bogen eines Kreises sein, der A nicht umschliesst, so dass wir von A reelle Tangenten an den Kreis ziehen können. Ein Kreis mit A als Mittelpunkt und der Tangente als Radius schneidet die drei Seiten des Dreiecks unter rechten Winkeln; da dieses Verhältnis durch lineare Transformation nicht verändert wird, sehen wir also, dass bei einem jeden zu einer Funktion dritter Art gehörenden Dreieck ein für die Seiten gemeinsamer, reeller

[1]) Felix Klein: Das Ikosaeder.


Digitized by Google

Orthogonalkreis existiert. Dieser Kreis hat gewisse Eigenschaften, die von grosser Bedeutung für die folgende Untersuchung sind:

Bei jeder Spiegelung des Dreiecks in einer von seinen Seiten bleibt der Orthogonalkreis liegen.

Spiegeln wir in der Seite AB, und hat diese den Mittelpunkt O, so bleiben ihre Schnittpunkte mit dem Orthogonalkreise liegen, während der Orthogonaikreis fortfahren muss die von O an diese Punkte gezogenen Radien zu berühren. Da der Orthogonalkreis dadurch eindeutig bestimmt ist, so muss er bei der Spiegelung unverändert bleiben.

Dass Dreieck muss ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des Orthogonalkreises liegen.

In dem betrachteten besonderen Falle fiel das Dreieck ganz innerhalb des Kreises; alle übrigen hiervon wesentlich verschiedenen Fälle lassen sich durch Inversion bilden (da Drehung u. s. w. das untersuchte Verhältnis nicht verändern); nun wird bei einer Inversion das Innere eines Kreises entweder als das Innere oder das Äussere eines Kreises abgebildet, und daraus folgt dann der Satz.

Da das eine Verhältnis in das andere durch eine Inversion übergeführt werden kann, so wollen wir voraussetzen, dass das Dreieck, von dem wir ausgehen, innerhalb des Orthogonalkreises liegt; dies muss dann auch dauernd der Fall sein mit den neuen durch Spiegelung gebildeten Dreiecken, da das Inversionscentrum beständig der Schnittpunkt für zwei Tangenten des Orthogonalkreises ist und deshalb ausserhalb dieses Kreises liegt. Ist einer von den Winkeln des Dreiecks Null, so liegt sein Scheitelpunkt auf der Peripherie des Orthogonalkreises.

Aus diesen Sätzen folgt nun, dass man nicht durch Fortsetzung des Verfahrens über die Peripherie des festen Orthogonalkreises hinaus kommen kann. Je mehr man sich dieser nähert, desto kleiner werden die Dreiecke, und in der Nähe eines Punktes der Peripherie giebt es unendlich viele unendlich kleine Dreiecke; alle diese Punkte werden deshalb wesentlich singuläre Punkte für die umgekehrte eindeutige Funktion, und

Digitized by Google

die Peripherie bildet die natürliche Grenze für diese. Der Leser möge versuchen eine hierzu gehörige Figur für die Zahlen 2, 3 und 7 zu zeichnen. Der Einfachheit wegen kann man die beiden Seiten, die den Winkel $\frac{1}{7}\pi$ einschliessen, als gerade Linien nehmen.

DAS PERIODENVERHÄLTNIS ALS DREIECKSFUNKTION.

73. Wir haben durch die Parameter der elliptischen Funktionen die algebraischen s-Funktionen kennen gelernt und werden nun sehen, das wir im Periodenverhältnis, genommen als Funktion eines der Parameter, eine transcendente Funktion dritter Art haben. Die umgekehrten eindeutigen Funktionen heissen in dem hier erwähnten Falle *elliptische Modulfunktionen,* denn unter Modulfunktionen im allgemeinen werden solche verstanden, die unverändert bleiben bei einer endlichen oder unendlichen Gruppe von linearen Transformationen ihrer unabhängig Variablen.

Bereits *Legendre* hat bemerkt, dass die Perioden eines elliptischen Integrals einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Die Beweise, die für diesen Satz gegeben sind, sind ziemlich verwickelter Natur; wir wollen hier einen sehr einfachen Beweis geben, wobei wir das Periodenverhältnis als Funktion des Doppelverhältnisses betrachten.

Wir setzen

$$\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)} = v$$

und differentiieren $2v(1-\lambda z)^{-2}$ mit Bezug auf z; dadurch erhalten wir ein Differential, dessen Integral algebraisch ist, und dessen Perioden, bestimmt durch die gewöhnlichen Periodenwege auf der zu v gehörenden *Riemann*schen Fläche, also Null sind. Das Differential wird

$$\frac{dz}{v}\frac{1+2(\lambda-1)z-\lambda z^2}{(1-\lambda z)^2}.$$

Setzen wir nun

$$u=\int\frac{dz}{v};\ \frac{du}{d\lambda}=\int\frac{dz}{v}\frac{z}{2(1-\lambda z)};\ \frac{d^2u}{d\lambda^2}=\int\frac{dz}{v}\frac{3z^2}{4(1-\lambda z)^2},$$

Digitized by Google

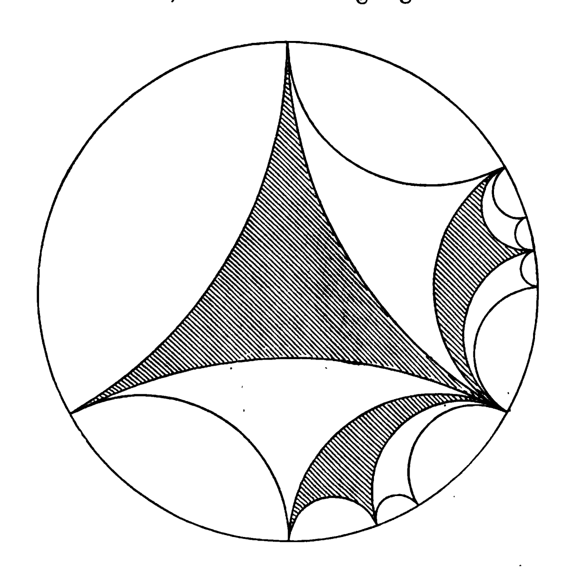
so erhalten wir, wenn wir die drei Ausdrücke beziehungsweise mit 1, $4(2\lambda-1)$, $4\lambda(\lambda-1)$ multiplicieren und addieren, unter dem Integralzeichen genau das obenstehende Differential; integrieren wir längs einem beliebigen Periodenwege, so wird das Integral Null; wir haben also, wenn u eine beliebige Periode bedeutet,

$$(3) \qquad \lambda(1-\lambda)\frac{d^2u}{d\lambda^2}+(1-2\lambda)\frac{du}{d\lambda}-\tfrac{1}{4}u=0.$$

Diese Gleichung ist indessen ein specieller Fall der Gleichung (16) auf S. 214, nämlich für $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$; $\gamma=1$, woraus wieder $\lambda=\mu=\nu=0$. Wir haben also folgenden Satz:

Das Periodenverhältnis als Funktion des Doppelverhältnisses ist eine Dreiecksfunktion, welche die Halbebene auf einem Kreisbogendreieck abbildet, dessen Winkel alle Null sind.

In der Figur haben wir vorausgesetzt, dass das Dreieck gleichseitig ist, was sich immer durch eine lineare Transformation erreichen lässt; durch Hinzufügung neuer Dreiecke durch



successive Spiegelung wird beständig ein immer grösserer Teil der Kreisfläche ausgefüllt. Alle Eckpunkte fallen auf die Peripherie und füllen diese immer dichter ohne Grenze.

74. Da jeder Kreis durch Inversion auf die Axe der reellen

Digitized by Google

Zahlen hinübergebracht werden kann, und Stücke dieser Axe durch s-Funktionen als Kreisbogen abgebildet werden, so müssen die Funktionen überhaupt Kreisbogen als Kreisbogen abbilden; mit Hülfe dieser Bemerkung können wir die zu ω als Funktion der absoluten Invariante I gehörige Figur bestimmen.

Wir haben S. 39 die I-Ebene durch die Funktion λ abgebildet und dadurch eine Einteilung der λ-Ebene in 6 Paare von Dreiecken erhalten, deren Seiten teils auf die Axe der reellen Zahlen fallen, teils diese Axe unter rechten Winkeln schneiden. Diese Einteilung der λ-Ebene bringt nun eine damit konforme Einteilung der einzelnen Dreiecke in der ω-Ebene mit sich, nämlich diejenige, die durch die Höhen der Dreiecke bestimmt wird; dadurch erhalten wir jedes Dreieck in der obenstehenden Figur in 6 andere geteilt, welche die Winkel $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ und 0 haben, haben also die ω als Funktion von I entsprechende Figur bestimmt, oder richtiger eine, die aus dieser durch eine lineare Transformation gebildet ist. Da das Periodenverhältnis immer einen imaginæren Teil mit positivem Koefficienten haben muss, so muss eine vollständige Bestimmung der Figur einen Orthogonalkreis geben, der in die Axe der reellen Zahlen übergegangen ist. Für die genauere Bestimmung ist es erforderlich, dass man ein einzelnes Dreieck kennt, dessen Eckpunkte $I=0$, 1 und ∞ entsprechen.

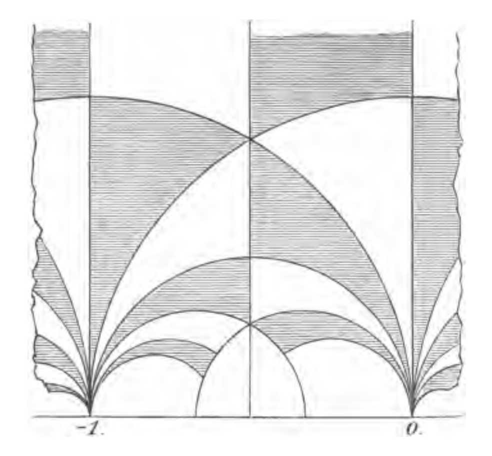
Um ein solches zu finden, setzen wir in das Riemannsche Integral $\lambda=-1$ und $x=-y$; dadurch erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}} = i\int_0^{-1} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1+y)}}.$$

Hier bestimmen die beiden Integrale die Hälften von einem Paar Perioden, und wir sehen also, dass i einer von denjenigen Werten des Periodenverhältnisses ist, die $\lambda=-1$ oder $I=1$ entsprechen.

Auf dieselbe Weise findet man, wenn man $\lambda=\beta$ und $1-\beta x=y$ setzt, wo $\beta^2-\beta+1=0$, dass $I=0$ einem Periodenverhältnis entspricht, das demjenigen von den komplexen Werten von $1^{\frac{1}{3}}$ gleich ist, dessen imaginärer Teil positiv ist.

Digitized by Google



Da die Seiten des gesuchten Dreiecks die Axe der reellen Zahlen unter rechten Winkeln schneiden sollen, so ist hierdurch die eine Seite bestimmt als zu einem Kreise gehörend, dessen Mittelpunkt der Punkt 0, und dessen Radius 1 ist. Die fehlenden Seiten bilden bekannte Winkel mit der gefundenen und mit der Axe der reellen Zahlen, und werden dadurch bestimmt als gerade Linien, die senkrecht auf der Axe der reellen Zahlen stehen. $I = \infty$ entspricht also der unendlich ferne Punkt auf der Axe der imaginären Zahlen; da die übrigen $I = \infty$ entsprechenden Punkte aus dem einen durch lineare Transformationen mit ganzen Koefficienten und der Determinante 1 gefunden werden, so werden sie alle reel und rational.

EINTEILUNG DER MODULSUBSTITUTIONEN.

75. Unter *Modulsubstitutionen* verstehen wir die linearen Transformationen, deren Koefficienten ganze Zahlen sind mit der Determinante 1. Da zwei solche durch Zusammensetzung eine von derselben Art geben, so bilden sie alle eine Gruppe, die *Modulgruppe*.

In der Regel wird es zwei von den Punkten der Ebene geben, die durch eine gegebene Transformation ihre Lage nicht ändern; diese heissen *Doppelpunkte* der Transformation und werden bestimmt durch die Gleichung

Digitized by Google

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

so dass wir für die Doppelpunkte erhalten

$$(5) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

Durch Einführung der Doppelpunkte können wir die Transformation auf die Form

$$(5) \qquad \frac{\omega' - \alpha}{\omega' - \beta} = k\frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta}$$

bringen; hieraus findet man, da $\omega = \infty$ einem $\omega' = \frac{a}{c}$ entspricht, dass

$$(6) \qquad k = \tfrac{1}{4}\left(a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}\right)^2,$$

wo wir nur ein Vorzeichen vor die Wurzelgrösse gesetzt haben, da die beiden Werte von k das Produkt 1 haben, also zwei Transformationen bestimmen, von denen die eine die reciproke der anderen ist.

Die gefundenen Resultate benutzt man, um die Substitutionen in drei Arten einzuteilen.

1. Ist $(a+d)^2 > 4$, so heisst die Substitution *hyperbolisch*. Die Doppelpunkte sind verschieden und reell, und k ist reell, positiv und von 1 verschieden. (5) zeigt, dass die beiden Brüche dasselbe Argument haben, oder dass ω', ω, α und β auf derselben Kreisperipherie liegen. Die Substitution ist von unendlich hoher Ordnung und wird auf die Potenz n erhoben, wenn k auf diese Potenz erhoben wird. Wenn n bis ins Unendliche wächst, so nähert der transformierte Punkt sich α, wenn $k < 1$, und β, wenn $k > 1$. Diese Substitutionen können bei den algebraischen Dreiecksfunktionen nicht vorkommen.

Als Beispiel können wir $\omega' = \frac{2\omega + 1}{\omega + 1}$ anführen mit den Doppelpunkten $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$; $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ und $k = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})$.

2. Ist $(a+d)^2 = 4$, so heisst die Substitution *parabolisch*.

Digitized by Google

α und β fallen zusammen in einen reellen und rationalen Punkt, und die Form (5) lässt sich nicht benutzen; sie wird ersetzt durch

$$\frac{1}{\omega' - \alpha} = \frac{1}{\omega - \alpha} + A, \tag{7}$$

oder, für $\alpha = \infty$,

$$\omega' = \omega + A, \tag{8}$$

wo A eine rationale Konstante bedeutet. Die Transformation ist von unendlich hoher Ordnung, und durch fortgesetzte Anwendung von ihr nähert der Punkt sich dem Doppelpunkt, indem er beständig auf einen Kreis fällt, der die Axe in diesem Punkte berührt.

Auf der Figur Seite 321 sehen wir, dass der $I = \infty$ entsprechende Punkt $i\,\infty$ Doppelpunkt ist für $\omega' = \omega \pm 1$.

3. $(a + d)^2 < 4$. Die Substitution heisst *elliptisch.* Da die Koefficienten ganze Zahlen sind, so haben wir nur zwei mögliche Fälle, nämlich $(a + d)^2 = 0$ und $(a + d)^2 = 1$.

Die Doppelpunkte sind konjugierte komplexe Punkte, und man hat in beiden Fällen beziehungsweise $k = -1$ und $k = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, so dass die Substitutionen beziehungsweise von zweiter und dritter Ordnung sind. Da der Doppelpunkt der Substitution (wir verstehen hierunter im besonderen denjenigen, der über der Axe der reellen Zahlen liegt) bei ihrer Anwendung liegen bleibt, so können wir ihre Wirkung mit einer erweiterten Bedeutung des Wortes als eine Drehung der Figur um diesen Punkt auffassen, wobei die Grösse der Drehung in den beiden Fällen beziehungsweise π und $\frac{2}{3}\pi$ ist. Die Doppelpunkte werden also solche Punkte, in denen beziehungsweise 4 und 6 abwechselnd schraffierte und weisse Dreiecke zusammenstossen.

76. Die beiden oben S. 319 und 321 stehenden Figuren können dazu dienen diese Bemerkungen zu illustrieren. Die erste, bei welcher der Orthogonalkreis durch eine lineare Substitution an die Stelle der Axe der reellen Zahlen getreten ist, zeigt, dass elliptische Substitutionen nicht vorkommen. In Wirklichkeit bleibt λ, als Funktion von ω, nicht unverändert

Digitized by Google

bei allen Modulsubstitutionen, da gewisse von diesen die 6 Werte von λ in einander überführen. Indem wir zu der zweiten Figur übergehen, teilen wir jedes Dreieck in 6 andere, so dass ein Doppeldreieck, das einem ganzen Blatt entspricht, in 6 weisse und 6 schraffierte Dreiecke geteilt wird; diese stossen in Punkten zusammen, um die sich beziehungsweise zwei oder drei Paare gruppieren, und die Doppelpunkte für elliptische Substitutionen sind. Einem Werte von I entspricht ein Punkt in jedem der 6 Dreieckspaare, und diese Punkte werden in einander übergeführt durch die elliptischen Transformationen. Nur einer von den 6 Punkten entspricht einem gegebenen Werte von λ, während die übrigen den übrigen 5 durch λ bestimmten Werten des Doppelverhältnisses entsprechen. Im besonderen sehen wir, dass der $I=1$ entsprechende Punkt i, um den herum zwei Paar Dreiecke liegen, so dass $k=-1$, der Substitution $\omega' = \frac{-1}{\omega}$ entspricht. Da alle Modulsubstitutionen, wie früher gezeigt, sich aus dieser und der $I=\infty$ entsprechenden parabolischen Substitution, $\omega' = \omega \pm 1$, zusammensetzen lassen, so muss die ω als Funktion von I entsprechende Gruppe die vollständige Modulgruppe sein.

Man erkennt hier die Übereinstimmung mit *Galois'* Theorie der algebraischen Gleichungen. Solange nur I als gegeben betrachtet wird, haben wir die vollständige Modulgruppe, wird aber λ hinzugefügt, so wird die Gruppe auf eine Untergruppe reduciert, die aus denjenigen Substitutionen besteht, die λ nicht ändern. Dadurch wird man dahin gebracht die Untergruppen zu suchen, die sich in der vollständigen Gruppe finden, um dadurch zu neuen Modulfunktionen zu gelangen. Diese Untersuchung bildet einen wesentlichen Teil der früher erwähnten Vorlesungen von *Felix Klein.*

PICARDS ERWEITERTER SATZ.

77. Das Entwickelte wollen wir nun benutzen, um den Seite 180 erwähnten Satz von *Picard* zu beweisen; zu dem Ende nehmen wir an, dass $\varphi(z)$ eine ganze transcendente Funk-

Digitized by Google

tion ist, und dass die Gleichungen $\varphi(z) = 0$ und $\varphi(z) = 1$ nur eine endliche Anzahl endlicher Lösungen haben; wir wollen beweisen, dass $\varphi(z)$ eine rationale Funktion sein muss, oder mit anderen Worten, dass sie im Punkte ∞ nur einen Pol haben kann.

Stellt $\omega(I)$ das Periodenverhältnis als Funktion der absoluten Invariante dar, so betrachten wir die Funktion

$$F(z) = \omega(\varphi(z)).$$

Um $z = 0$ zeichnen wir einen Kreis S, der alle $\varphi(z) = 0$ und $\varphi(z) = 1$ entsprechenden Punkte enthält. Ausserhalb des Kreises giebt es dann keinen anderen singulären Punkt für $F(z)$ als den Punkt $z = \infty$, und dieser soll nun genauer untersucht werden.

Durchläuft z eine geschlossene Kurve, die S enthält, so beschreibt auch $\varphi(z)$ eine geschlossene Kurve, und ein Wert ω von $F(z)$ geht über in einen Wert ω', der aus ω durch eine Modulsubstitution gebildet wird. Diese muss für jeden geschlossenen Weg, der einmal um S herum führt, dieselbe bleiben, da zwei solche Wege sich durch stetige Änderung in einander überführen lassen, ohne dass ein singulärer Punkt passiert wird. Wir betrachten nun jede der drei Arten von Substitutionen für sich, wobei jedoch auch auf die Möglichkeit, dass die Substitution die identische sein kann, Rücksicht zu nehmen ist.

Die elliptischen Modulfunktionen sind beziehungsweise von zweiter und dritter Ordnung. Im ersten Falle ist der Multiplikator $k = -1$, so dass der durch die Doppelpunkte α und β ausgedrückte Bruch (5) das Vorzeichen wechselt, wenn z um den Punkt ∞ herumgeht; dasselbe gilt von $\sqrt{z}$, und setzen wir

$$\frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta} = \frac{\psi(z)}{\sqrt{z}},$$

so muss also $\psi(z)$ eindeutig in der Umgegend von ∞ sein. Setzen wir voraus, dass β derjenige Doppelpunkt ist, dessen imaginärer Teil negativ ist, und lassen wir z sich ∞ nähern,



so kann ω sich nicht β nähern, der Bruch kann also nicht unendlich werden.

$\psi(z)$ kann also weder in ∞ einen Pol haben, da die Funktion in einem solchem unendlich von mindestens erster Ordnung ist, noch einen wesentlich singulären Punkt, da die Funktion in einem solchen unendlich werden kann von so hoher Ordnung, wie man will. Der Bruch auf der rechten Seite muss sich deshalb Null nähern, so dass ω sich α nähern muss, einerlei wie z sich ∞ nähert. Nun ist jedoch α einer von den Werten von ω, die, ebenso wie $\omega = i$, einem $I = 1$ entsprechen; wir sehen also, dass $\varphi(z)$ sich 1 nähert, wenn z sich ∞ nähert, und dieser Punkt kann deshalb nicht singulär sein; das ist indessen unmöglich, da $\varphi(z)$ eine ganze transcendente Funktion ist.

Auf dieselbe Weise zeigt man, dass die Substitution nicht von dritter Ordnung sein kann; hierfür benutzt man den Divisor $\sqrt[3]{z}$ und findet, dass $\varphi(z)$ sich für $z = \infty$ der Null nähert. Die Substitution kann also nicht elliptisch sein.

Ist die Substitution hyperbolisch, so setzt man

$$\frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta} = z^{\frac{a}{2\pi i}} \psi(z),$$

wo α und β reell sind, und $a = lk$, wo k den positiven Multiplikator bedeutet; a kann als positiv betrachtet werden. Da der exponentielle Faktor ebenso wie der Bruch mit k multipliciert wird, wenn z um ∞ herumgeht, so wird $\psi(z)$ eindeutig. Zeichnen wir um ∞ einen kleinen Kreis s, so begrenzen dieser und S ein Areal, in welchem $\psi(z)$ nicht Null oder unendlich werden kann, denn der exponentielle Faktor hat einen Modulus, der keinen von diesen Werten erhalten kann, und ω kann nur den Wert α oder β annehmen, wenn $\varphi(z)$ gleich 0, 1 oder ∞ ist. Deshalb kann man $\psi'(z):\psi(z)$ in einer im Kreisringe geltenden Reihe entwickeln (I. 75):

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \ldots \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a + bz + \ldots,$$

Digitized by Google

wo a_1 wegen der Eindeutigkeit von ψ eine ganze Zahl m sein muss; hieraus folgt also

$$\psi(z) = z^m e^{P(z)},$$

wo $P(z)$ ausserhalb S eindeutig und stetig ist, ausgenommen in ∞. Man hat also

$$\frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta} = e^{\left(\frac{a}{2\pi i} + m\right) l(z) + P(z)}.$$

Nun kann der Koefficient von i auf der linken Seite durch keine Variation von z das Vorzeichen wechseln, während sich zeigen lässt, dass dies nicht von der Grösse auf der rechten Seite gilt, und dadurch ist dann gezeigt, dass die Substitution nicht hyperbolisch sein kann.

Setzen wir den Exponenten auf der rechten Seite gleich $u + iv$, so wechselt der genannte Koefficient das Zeichen mit $\sin v$, und wir wollen deshalb zeigen, dass v nicht immer zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von π liegt. Das ergiebt sich sofort, wenn m nicht Null ist, da v die Zunahme $2m\pi$ erfährt, wenn z einmal um ∞ herumgeht. Für $m = 0$ haben wir

$$lz + \frac{2\pi i}{a} P(z) = -\frac{2\pi v}{a} + \frac{2\pi i u}{a},$$

oder

$$z e^{\frac{2\pi i}{a} P(z)} = e^{-\frac{2\pi v}{a}} e^{\frac{2\pi i u}{a}}.$$

Hier hat die rechte Seite einen Modulus, der nach unserer Voraussetzung über v immer zwischen zwei endliche von Null verschiedene Grenzen fällt, wenn z sich ∞ nähert. Dies gilt jedoch nicht von der linken Seite, einerlei ob $P(z)$ in ∞ einen gewöhnlichen Punkt, einen Pol oder einen wesentlich singulären Punkt hat.

Ist die Substitution parabolisch, so setzen wir (7)

$$u = -\frac{1}{\omega - \alpha} = \frac{Alz}{2\pi i} + \psi(z),$$

Digitized by Google


Digitized by Google